$SU(7)$ 模型的 CP 破坏问题

勾亮 陈风至 郝春
(中国科学院高能物理研究所) (黑龙江大学)

摘要

我们研究了包括四代的 $SU(7)$ 大统一模型[1,2]的 CP 破坏问题．结果表明，适当地选取夸克矩阵元及其复相位 α_i (如文献 [2] 那样)，可以得到与实验相符的 CP 破坏．并且，适当地选取 Hoggs 势(如文献 [2] 那样)可以使强 CP 破坏参数 θ 在树图级为零而与实验相符．

在过去七、八年间，一些作者提出了把强相互作用，电磁相互作用和弱作用统一起来的规范理论，如 $SU(5)$ 模型[3]，$SO(10)$ 模型[4]等．他们都有许多成功之处，但它们只考虑了一代费米子的统一，因而"代"的问题没解决．有些作者也曾对"代"的问题进行了探讨．最近，文献 [1，2] 提出了解决代之间的统一的 $SU(7)$ 大统一模型．为了显示这一模型的基本特征，他们没讨论该模型的 CP 破坏问题，他们只取了 Higgs 场的实的真空期望值(即实的夸克质量矩阵)．因此，人们自然会问该模型能否允许给出与实验相符的弱 CP 破坏？在树图级能否使强 CP 破坏参数 θ 自然等于零？为此，我们研究了 $SU(7)$ 模型拉氏量中的夸克质量项，使其矩阵元为复的，导出了一个联系 KM 矩阵中 CP 破坏因子 δ 和夸克质量矩阵元复相位 α_i 的关系的明显表达式．并把此结果应用到文献[2]的模型．结果表明，该模型可以得到与实验相符的弱 CP 破坏，并在树图级可使强 CP 破坏参数 θ 自然等于零而与实验相符．

一、

为了导出联系 δ 和 α_i 的明显表达式，我们讨论了一个比文献 [1] 中的 $\mathscr{L}_{mass}$ [见(10)式]稍微一般的 $\mathscr{L}_{mass}$，即假设

$$\mathscr{L}_{mass} = \bar{u}_{oR} M_u u_{oL} + \bar{d}_{oR} M_d d_{oL} + h_1 c_1$$

式中，

$$M_u = \begin{pmatrix} A & & & \\ Be^{i\alpha_1} & Ce^{i\alpha_2} & & \\ & De^{i\alpha_3} & Ee^{i\alpha_4} & \\ & & & Fe^{i\alpha_5} \end{pmatrix}; \quad M_d = \begin{pmatrix} & Ae^{i\alpha'_1} & & \\ B'e^{i\alpha'_2} & C' & & \\ F'e^{i\alpha'_3} & & D'e^{i\alpha'_4} & \\ & & & E'e^{i\alpha'_5} \end{pmatrix}; \quad (1)$$

本文 1980 年 9 月 25 日收到．

$$u_{oL}=\begin{pmatrix}u_0\\c_0\\t_0\\t_0'\end{pmatrix}_L;\quad u_{oR}=\begin{pmatrix}u_0\\c_0\\t_0\\t_0'\end{pmatrix}_R;\quad d_{oL}=\begin{pmatrix}d_0\\s_0\\b_0\\b_0'\end{pmatrix}_L;\quad d_{oR}=\begin{pmatrix}d_0\\s_0\\b_0\\b_0'\end{pmatrix}_R.$$

通过左右手场分别吸收适当的复相因子，可使质量矩阵化为实矩阵：

$$M_u=\begin{pmatrix}A&&&\\B&C&&\\&D&E&\\&&&F\end{pmatrix};\quad M_d=\begin{pmatrix}&A'&&\\B'&C'&&\\F'&&D'&\\&&&E'\end{pmatrix}. \tag{2}$$

此时，左手带电流 J_μ 变为：

$$\begin{aligned}J_\mu&=\bar{u}_{oL}\gamma_\mu d_{oL}=\bar{u}_L\gamma_\mu x_L^+y_Ld_L\\&=\bar{u}_L\gamma_\mu\begin{pmatrix}1&&&\\&e^{i\alpha}&&\\&&e^{i\beta}&\\&&&e^{i\gamma}\end{pmatrix}d_L.\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha&=\alpha_2'-\alpha_1+\alpha_2\\\beta&=\alpha_3'-\alpha_4'-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4\\\gamma_5&=-\alpha_5'\end{aligned} \tag{3'}$$

u_L, d_L 为吸收相因子后的场量 ($u_{oL}=x_Lu_L$, $d_{oL}=y_Ld_L$)。再对 u, d 作一次实正交变换

$$\begin{aligned}u_L&=O_L^uu_L'\quad u_R=O_R^uu_R'\\d_L&=O_L^dd_L'\quad d_R=O_R^dd_R'\end{aligned} \tag{4}$$

以使质量矩阵 M_u 和 M_d 成为对角形. 由 (2) 所表示的 M_u 和 M_d 的形式可知，$(O_L^u)^{-1}$ 和 O_L^d 的一般形式为：

$$(O_L^u)^{-1}=\begin{pmatrix}M&\\&1\end{pmatrix};\quad O_L^d=\begin{pmatrix}N&\\&1\end{pmatrix}.$$

式中M和N均为 3×3 正交矩阵：

$$M=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix};\quad N=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}.$$

经过变换 (4), (3) 式可写成：

$$J_\mu=\bar{u}_L'\gamma_\mu Kd_L', \tag{5}$$

其中

$$K=(O_L^u)^{-1}\begin{pmatrix}1&&&\\&e^{i\alpha}&&\\&&e^{i\beta}&\\&&&e^{i\gamma}\end{pmatrix}O_L^d.$$

为了得到 K-M 矩阵，再对 u_L' 和 d_L' 作适当的相位变换，将K的第一行和第一列诸元素均

化为实数. 为此，我们明显地写出K的形式（由于第四行和第四列对所讨论的问题没影响，只写出左上角 3×3 矩阵）：

$$K=\begin{pmatrix}\gamma_{11}e^{i\varphi_{11}} & \gamma_{12}e^{i\varphi_{12}} & \gamma_{13}e^{i\varphi_{13}}\\ \gamma_{21}e^{i\varphi_{21}} & \gamma_{22}e^{i\varphi_{22}} & \gamma_{23}e^{i\varphi_{23}}\\ \gamma_{31}e^{i\varphi_{31}} & \gamma_{32}e^{i\varphi_{32}} & \gamma_{33}e^{i\varphi_{33}}\end{pmatrix} \tag{6}$$

式中第一行第一列的复相角为：

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_{12}b_{21}\sin\alpha+a_{13}b_{31}\sin\beta}{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}\cos\alpha+a_{13}b_{31}\cos\beta}\\
\varphi_{12} &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_{12}b_{22}\sin\alpha+a_{13}b_{32}\sin\beta}{a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\cos\alpha+a_{13}b_{32}\cos\beta}\\
\varphi_{13} &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_{12}b_{23}\sin\alpha+a_{13}b_{33}\sin\beta}{a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}\cos\alpha+a_{13}b_{33}\cos\beta}\\
\varphi_{21} &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_{22}b_{21}\sin\alpha+a_{23}b_{31}\sin\beta}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}\cos\alpha+a_{23}b_{31}\cos\beta}\\
\varphi_{31} &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_{32}b_{21}\sin\alpha+a_{33}b_{31}\sin\beta}{a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}\cos\alpha+a_{33}b_{31}\cos\beta}\\
&(0\leqslant\varphi_{ij}\leqslant 2\pi)
\end{aligned} \tag{7}$$

对u'和d'作如下变换

$$u'_L=\begin{pmatrix}e^{i\varphi_{11}} & & & \\ & e^{i\varphi_{21}} & & \\ & & e^{i\varphi_{31}} & \\ & & & 1\end{pmatrix}u''_L;\quad d'_L=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & e^{i(\varphi_{11}-\varphi_{12})} & & \\ & & e^{i(\varphi_{11}-\varphi_{13})} & \\ & & & e^{-i\gamma}\end{pmatrix}d''_L$$

则K矩阵的第一行，第一列诸元素均化为实的，记作K'，其前三行三列就为KM矩阵，并且：

$$\det K'=e^{i(-\varphi_{21}-\varphi_{31}-\varphi_{12}-\varphi_{13}+\varphi_{11}+\alpha+\beta)}. \tag{8}$$

另一方面KM矩阵的标准形式[5]为：

$$KM=R_1(\theta_3)R_3(\theta_1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & e^{i\delta}\end{pmatrix}R_1(\theta_2)$$

求出上式的行列式，并取 Det $R_1(\theta_3)$ = Det $R_3(\theta_1)=1$，得

$$\mathrm{Det}\,KM=e^{i\delta}, \tag{9}$$

比较(8)和(9)两式可得：

$$\delta=\alpha+\beta+\varphi_{11}-\varphi_{12}-\varphi_{13}-\varphi_{21}-\varphi_{31}. \tag{10}$$

当矩阵M是对角形时，由(7)式得：

$$\varphi_{11}=\varphi_{12}=\varphi_{13}=0,$$
$$\varphi_{21}=\alpha,\quad \varphi_{31}=\beta.$$

所以，$\delta=0$，这是很自然的，因为当M为对角时，矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & e^{i\alpha} & & \\ & & e^{i\beta} & \\ & & & e^{i\gamma} \end{pmatrix}$$

与 A 对易，因此，可被吸收到 u_L 中去.

同样当矩阵 N 是对角时，$\varphi_{11}=\varphi_{21}=\varphi_{31}=0$，$\varphi_{12}=\alpha$，$\varphi_{13}=\beta$，所以 $\delta=0$，无 CP 破坏.

由 (10) 可知，表征 CP 破坏的复相位可由夸克质量矩阵元的复相位决定，因此，适当地选取质矩阵的复相位可使 δ 不为零而使理论可以容纳 CP 破坏.

需要指出的是，(1) 式中的矩阵 M_u 和 M_d 还可以选得更一般些，可以在 M_u 和 M_d 的左上角的 3×3 矩阵中添加非零元素. 虽然此时不能通过变换消去全部复相位，但新增加矩阵元除了增加问题的复杂性外，不会影响以上结论. 下面我们将具体讨论文献[2]中的模型的弱 CP 破坏和强 CP 破坏.

二、

(1) 在文献 [2] 中的模型 C，质量较轻的四代夸克全为左手流，所以可以应用第一节中讨论的方法. 该模型的质量矩阵为[2]：

$$M_u=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix};\quad M_d=\begin{pmatrix} 0 & \delta_1 & & \\ -\delta_1^{+} & a & \delta_2 & \delta_3 \\ & & b' & \\ & & & c' \end{pmatrix}. \tag{11}$$

由第一节讨论知，这样的质量矩阵不能给出 CP 破坏，因为 M_u 为对角形的. 欲使 $SU(7)$ 模型给出 CP 破坏，必须取比 (11) 更一般的质量矩阵. 为此，我们分两步考虑：

(i)，在文献 [2] 中的 $\mathscr{L}^{yuk}$ 中添加以下两项：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3!(2!)^2}\frac{A}{2}\phi_{+}^{efg}\tilde{\psi}_{L+}^{ab}C^{-1}\psi_{L+}^{cd}\epsilon_{abcdefg}, \\ &\frac{1}{(3!)^2}B\phi_{-def}^{abc}\bar{\psi}_{R+abc}\psi_{-}^{def}. \end{aligned} \tag{12}$$

并取 $\langle\phi^{567}\rangle=\Delta_1'$，$\langle\phi_{237}^{235}\rangle=\langle\phi_{127}^{125}\rangle=\langle\phi_{317}^{315}\rangle=\Delta_2'$. 这样，矩阵 M_u 就变成：

$$M_u=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ \Delta_1 & \lambda_2 & & \\ & \Delta_2 & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix};\quad 其中\ \Delta_1=A\Delta_1',\quad \Delta_2=B\Delta_2'. \tag{13}$$

(ii)，对文献 [2] 中所选取的 Higgs 场的及添加的 (12) 式，适当地选取 Higgs 场的真空平均值，使得 (11) 和 (13) 中的真空期望值 δ_1、Δ_1 和 Δ_2 取如下形式：

$$\delta_1\to\delta_1e^{-i\beta_1},\quad \Delta_1\to\Delta_1e^{i\alpha_1},\quad \Delta_2\to\Delta_2e^{i\alpha_2}.$$

于是文献 [2] 中与 (11) 和 (13) 相对应的两矩阵变成：

$$M_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ \Delta_1 e^{i\alpha_1} & \lambda_2 & & \\ & \Delta_2 e^{i\alpha_2} & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}; \quad M_d = \begin{pmatrix} & & \delta_1 e^{-i\beta_1} & \\ -\delta_1 e^{i\beta_1} & a & \delta_2 & \delta_3 \\ & & b' & \\ & & & c' \end{pmatrix}. \tag{14}$$

把复相角吸收到夸克场里之后，可求得

$$\alpha = \beta_1 - \alpha_1,$$

$$\beta = \beta_1 - \alpha_1 - \alpha_2.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 均可任意，故由 (10) 式知 CP 破坏参数 δ 可取 $0 \to 2\pi$ 值. 再由文献 [2] 给出的条件:

$$c' \gg b' \gg a \gg \delta_1, \delta_2, \delta_3$$

$$\lambda_4 \gg \lambda_3 \gg \lambda_2 \gg A_1 \gg \Delta_1, \Delta_2$$

以及求得公式:

$$\sin\theta_2 \sin\theta_3 \sim \operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{tg}\theta_3 \sim \frac{\Delta_2\Delta_1\delta_1\delta_2}{\lambda_3\lambda_2 a b'} \Big/ 2\left[\left(\frac{\delta_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_1}{\lambda}\right)^2\right]$$

便知，总可使弱 CP 破坏强度在 10^{-3}—10^{-6} 之间[7]，而与实验相符.

(2) 对于 $SU(5)$ 大统一模型的强 CP 破坏有许多作者已讨论[8—10]. 由中子电偶极矩之测量给出强 CP 破坏的限制要求自发破坏的强 CP 破坏参数 θ 在树图级为零. 而 θ 是由夸克质量矩阵决定的:

$$\theta = \operatorname{Arg}\operatorname{Det}(M_u M_d)$$

把 (14) 式代入可得:

$$\theta = 0$$

所以，文献 [2] 中 $SU(7)$ 大统一模型在树图级自然给出强 CP 破坏因子 $\theta = 0$，而与实验相符.

最后，我们对朱洪元教授，杜东生副教授，薛丕友，周咸建，马中骐诸同志的热情帮助和讨论表示感谢.

参考文献

[1] 马中骐、杜东生、岳宗五、薛丕友，中国科学，**4**(1981)，415.
[2] 中国科学，**5**(1981)，550。
[3] V. Baluni, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 2227.
[4] H. Geogi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**(1974), 438.
[5] J. Ellis and D. V. Nanopoulos, *Nucl. Phys.*,**B155**(1979), 52.
[6] M. Kobayashi and Maskawa, *Progr. Theor. Phys.*, **49**(1973), 652.
C. Jarlshog, Scientific/Technical Reports **No110**(1978).
[7] P. Langacker, SLAC. Priprent SLAC-PUB-2544 (1980).
[8] L. Ellis and M. K. Gaillard, *Nucl. Phys.*, **B150**(1979), 141.
[9] A. Harlbert and F. Wilczek, *Phys. Lett.*, **B93**(1980), 274.
[10] R. H. Mohapatra and D. Wyler, *Phys. Lett.*, **B89**(1980), 181.

THE CP VIOLATION OF $SU(7)$ MODEL

GOU LIANG　CHEN FENG-ZHI
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)
HAO CHUN
(*Heilongiang University*)

ABSTRACT

We discuss the CP violation problem of $SU(7)$ models of Grand Unified Theory including four genarations[1,2]. It is shown that if we properly choose the complex phase angles in quark mass matrix elements, we are able to obtain the CP violation phase angle which agrees well with the experimental value. If the Higgs potential is properly choosen we find that the strong CP violation parameter θ is equal to zero at the tree level.