

在带头对数项近似下中微子深度非弹过程中 $x F_3(x, Q^2)$ 的 QCD 行为

沈齐兴 吴济民 陆景贤 赵佩英

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文利用我们已经给出的在带头对数近似下强子价夸克分布函数的解析表达式^[1]讨论了在中微子深度非弹过程中结构函数 $x F_3$ 的 QCD 行为, 理论预言与实验结果很好地符合. 最后, 讨论了由于我们在用 A-P 方程求解解析过程中作了一个近似所引起的误差计算表明即使在 $Q^2 = 200 \text{ GeV}$, $x = 0.1$ 情况下, 相对误差仍小于 1%.

在轻子-核子散射实验中, 轻子作为一个有效的探针探测了核子的内部结构. 按照夸克-部分子模型, 描写核子内部结构的核子结构函数或夸克分布函数成为研究的主要课题. Bjorken 猜测核子结构函数是无标度性的^[1], 后来在 eN 、 μN 、 νN 散射实验中^[2] 先后发现了结构函数有微小的对无标度性的破坏.

到目前为止, 在理论上对于核子结构函数的讨论归纳起来大体有下面几种方法: (1) 初期定性地讨论, (2) 用模型理论讨论, 例如矢量为主模型^[3], 重夸克模型理论^[4], (3) 用重整化群方程、算符乘积展开方法以及量子色动力学给出的渐近自由性质, 在某一初始条件下得到关于分布函数矩的行为, 再用逆 Mellin 变换的方法, 数值地得到分布函数的行为^[5], (4) 在某一初始条件下数值地求解 QCD 演变方程得到分布函数的行为^[6]. 从上述几种方法的讨论中可以看出, 量子色动力学作为一个可能的强作用理论的候选者, 只有它能比较满意地解释无标度性破坏现象.

现在已经看到, 使用第三种方法有较多的缺点^[7], 所以人们都转向利用量子色动力学体系中给出的分布函数的演变方程 (即 Alterelli-Parisi 方程^[8]) 来直接讨论分布函数本身的行为.

在精确到 α_s 一次项和带头对数项近似下, A-P 方程描写分布函数之行为. 这个方程的物理图象比较清楚, 但是数学上求解比较困难, 所以人们一直使用数值方法求解, 无疑这样做必然会丢失不少有用的知识.

最近, 我们利用 A-P 方程, 在某一初始输入下在一个合理的近似下, 得到了价夸克分布函数的解析解^[9], 并且用来讨论了电生过程中的非单态分量 $F_2^{ep} - F_2^{en}$ 的行为, 在 $x > 0.3$

it $F_2^{ep} - F_2^{en}$

by using
hadrons up
with data

区域中 $F_2^p(x, Q^2)$ 的行为以及标度性破坏参数等等, 与现有实验结果很好地符合. 在本文第一节中, 我们将此解析解用来讨论中微子产生过程中的非单态量的行为, 在第二节中讨论由于我们在用 A-P 方程求得解析解过程中作的近似所引起的误差.

在中微子-核子散射过程中, 对于带电流过程存在非单态分量:

$$x\bar{F}_3 \equiv \frac{1}{2} (xF_3^{\nu N} + xF_3^{\bar{\nu} N}) = x \sum_i \{q^i(x, Q^2) - \bar{q}^i(x, Q^2)\} \quad (1)$$

这个量只与核子中价夸克分布有关.

在前面的工作中^[9], 我们利用 A-P 方程并假设在 $Q^2 = Q_0^2$ 处价夸克分布函数的初始形式为

$$q_V(x, Q_0^2) = \frac{1}{B(a+1, b+1)} x^a (1-x)^b \quad (2)$$

得到了任何 Q^2 时价夸克分布函数的一般形式是

$$\begin{aligned} D(x, Q^2, a, b) &= \frac{1}{B(a+1, b+1)} x^a (1-x)^b e^{(\frac{3}{4}-c)} \frac{1}{\Gamma(s)} \\ &\cdot \left\{ \mathcal{A}_0(a-1, b, s) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s \right. \\ &+ \left[\frac{1}{2} \mathcal{A}_0(a-1, b, s+1) + \mathcal{A}_1(a-1, b, s) \right] \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s+1} \\ &+ \left[\frac{1}{8} \frac{s+4}{s+1} \mathcal{A}_0(a-1, b, s+2) + \frac{1}{2} \mathcal{A}_1(a-1, b, s+1) \right. \\ &+ \left. \mathcal{A}_2(a-1, b, s) \right] \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s+2} \\ &+ \left[\frac{1}{24} \frac{s^2+6s+12}{(s+1)(s+2)} \mathcal{A}_0(a-1, b, s+3) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{8} \frac{s+4}{s+1} \mathcal{A}_1(a-1, b, s+2) + \frac{1}{2} \mathcal{A}_2(a-1, b, s+1) \right. \\ &+ \left. \mathcal{A}_3(a-1, b, s) \right] \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s+3} + \dots \left. \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(a, b, s) &= B(s, b+1) \\ \mathcal{A}_1(a, b, s) &= \frac{1}{2} s B(s, b+1) + \left[a - \frac{1}{2} (s+1) \right] B(s+1, b+1) \\ \mathcal{A}_2(a, b, s) &= \frac{1}{24} s(3s+1) B(s, b+1) \\ &+ \frac{1}{2} \left[a - \frac{1}{2} (s+1) \right] (s+1) B(s+1, b+1) \\ &+ \frac{1}{2} \left[a^2 - a(s+2) + \frac{1}{12} (s+2)(3s+5) \right] B(s+2, b+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3(a, b, s) = & \frac{1}{48} s^2(s+1)B(s, b+1) \\ & + \frac{1}{24} \left[a - \frac{1}{2}(s+1) \right] (3s+4)(s+1)B(s+1, b+1) \\ & + \frac{1}{4}(s+2) \left[a^2 - a(s+2) + \frac{1}{12}(s+2)(3s+5) \right] B(s+2, b+1) \\ & + \frac{1}{6} \left[a^3 - \frac{3}{2}a^2(s+3) + \frac{1}{4}a(s+3)(3s+8) \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}(s+2)(s+3)^2 \right] B(s+3, b+1) \cdots \end{aligned} \quad (4)$$

$$s = \frac{4}{3\pi b_0} \ln \frac{t}{t_0}, \quad t = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad b_0 = \frac{33 - 2f}{12\pi} \quad (4a)$$

f ——味道数=4

$\Gamma(s)$ 是伽玛函数, $B(a, b)$ 是 Beta 函数, c 是欧拉常数。

Buras-Gaemers^[10] 从大量的实验数据拟合出了价夸克、海夸克和胶子的分布函数的经验表达式, 我们选取他们在 $Q_0^2 = 1.8 \text{ GeV}^2/c^2$ 时价夸克分布函数作为我们在这里的初始输

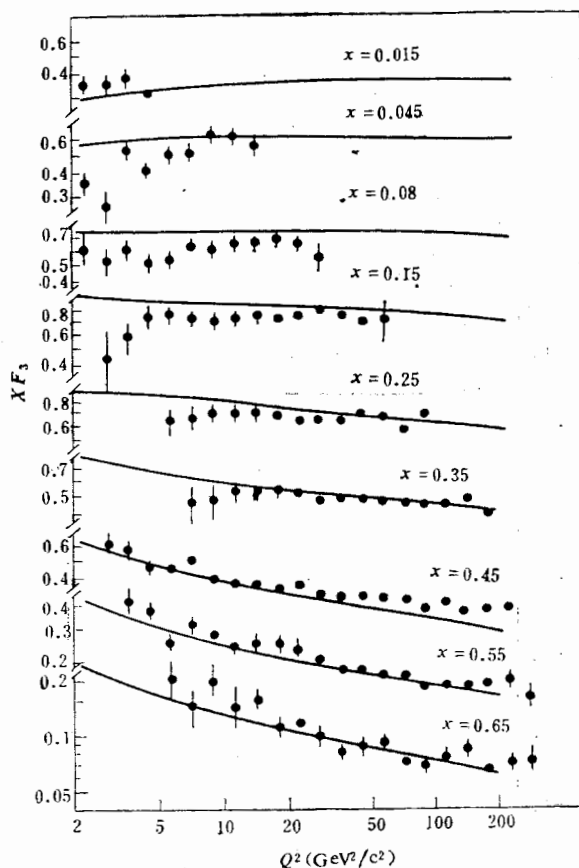


图 1 关于结构函数 $x F_3(x, Q^2)$ 的理论预言与实验结果的比较。其中实验数据来自[12], 并取 $\Lambda = 0.5 \text{ GeV}/c$

入,即

$$xu_V(x, Q_0^2) = \frac{3}{B(0.70, 3.6)} x^{0.7}(1-x)^{2.6} - \frac{1}{B(0.85, 4.35)} x^{0.85}(1-x)^{3.35}$$

$$xd_V(x, Q_0^2) = \frac{1}{B(0.85, 4.35)} x^{0.85}(1-x)^{3.35} \quad (5)$$

这样,由(1)–(5)式我们就很容易求得中微子-核子散射中结构函数 $xF_3(x, Q^2)$ 无标度性破坏的行为

$$xF_3(x, Q^2) = x(u_V + d_V) = 3xD(x, Q^2, -0.3, 2.6) \quad (6)$$

其结果给出在图1中。计算结果表明,在带头对数近似下,理论预言与实验结果很好地符合。另外在图2中给出了无标度性破坏参数

$$\frac{\partial \ln xF_3}{\partial \ln(Q^2/\Lambda^2)}$$

这一理论预言有待实验检验。

以上我们用价夸克分布函数的解析表达式很好地解释了在中微子-核子散射过程中非单态分量 $x\bar{F}_3$ 的行为,在带头对数项近似下理论与实验之间很好地符合。但是,在这些计算中我们所选取的重整化参数 $\Lambda = 0.5\text{GeV}/c$,这与在讨论电子深度非弹散射过程时不同(在那里我们取 $\Lambda = 0.3\text{GeV}/c$),关于参数 Λ 的合理的选取问题,还有待积累更多的知识。另外,在这些讨论中没有考虑所谓的“高 twist”修正效应,这也是有待于继续研究的问题。

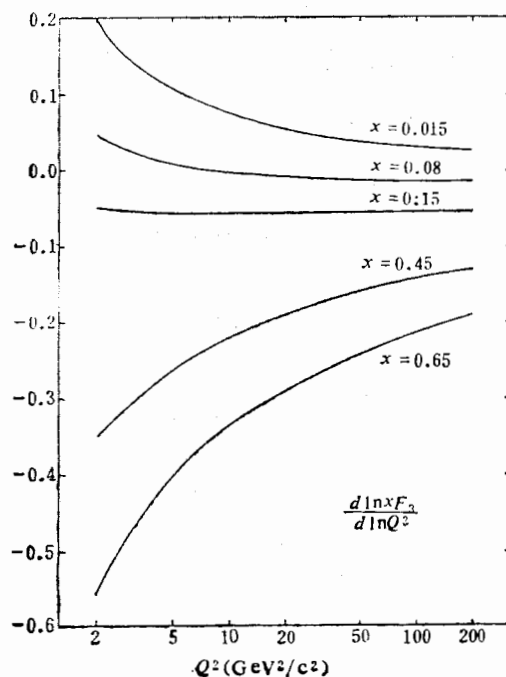


图2 中微子带电过程中无标度性破坏参数 $\frac{d \ln xF_3(x, Q^2)}{d \ln(Q^2/\Lambda^2)}$

利用已有的价夸克分布函数, 还可给出对中微子-核子中性流过程的结构函数的预言. 在中性流过程中, 基本散射截面 $\frac{d^2\sigma}{dx dy}$ 是 (以 $\frac{G^2 M E}{\pi}$ 为单位)

$$\begin{cases} \delta_1^2 + \delta_3^2(1-y)^2 & \text{对 } \nu u, \bar{\nu} \bar{u} \text{ 散射} \\ \delta_1^2(1-y)^2 + \delta_3^2 & \text{对 } \nu \bar{u}, \bar{\nu} u \text{ 散射} \\ \delta_2^2 + \delta_4^2(1-y)^2 & \text{对 } \nu d, \bar{\nu} \bar{d} \text{ 散射} \\ \delta_2^2(1-y)^2 + \delta_4^2 & \text{对 } \nu \bar{d}, \bar{\nu} d \text{ 散射} \end{cases} \quad (7)$$

按照弱电统一模型, 其中

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w; & \delta_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w; \\ \delta_3 &= -\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w; & \delta_4 &= \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \end{aligned} \quad (8)$$

θ_w 是 Weinberg 角, 取为 $\sin^2 \theta_w = 0.23$.

因此, 对于中微子-核子中性流过程, 有

$$\begin{aligned} xF_3^\nu &= xF_3^{\bar{\nu}} = x(u_V + d_V)(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 - \delta_4^2) \\ &= x(u_V + d_V) \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w \right) = 0.27x(u_V + d_V) \end{aligned} \quad (9)$$

所以, 弱中性流与带电流深度非弹过程中结构函数之间只相差一个倍数. 由于这类实验比较难做, 目前有关的数据仍然很少^[11], 我们期待上述预言逐步得到实验检验.

二、

为了从 A-P 方程求得价夸克分布函数的解析解 $q_V(x, Q^2)$, 在计算中我们曾作了一个微小的近似, 下面我们讨论这个微小近似对 A-P 方程严格解所引起的偏离误差.

价夸克分布函数满足如下方程:

$$q_V(x, t) = \int_x^1 \frac{dz}{z} q_V(x, t_0) \tilde{F}_{qq1} \left(\frac{x}{z}, t \right) \quad (10)$$

其中

$$\tilde{F}_{qq1}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} dn x^{-n} c \frac{A_n^{qq}}{2^n} \quad (11)$$

s, t 已由 (4a) 式给出.

按照逆 Mellin 变换的定义, 上一积分回路是在复 n 平面上被积函数所有奇点的右端. 在得到文献 [9] 中的解析解时, 我们曾对反常量纲 A_n^{qq} 作了下列近似

$$\begin{aligned} A_n^{qq} &= - \left[-\frac{3}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} + \phi(1+n) + c \right] \\ &\simeq \frac{3}{4} - c + \frac{1}{2n} - \ln(n+1) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\phi(n)$ 为 Psi 函数, c 为欧拉常数.

为了计算方程 (10) 在相同初始输入 $q_V(x, t_0)$ 下的严格解, 我们采用计算机数值计算

方程(10)的解.

首先采用两种不同的展开方法求解(11)式:

(1) 将其中的 $e^{\frac{A^2 q_s}{n}}$ 展开成 $(n+1)$ 的幂级数, 并且利用下一关系:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dx x^{-n} \frac{1}{n!(n+1)^L} = \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{L-1}}{\Gamma(L)} {}_1F_1\left(L, L+1, -\ln \frac{1}{x}\right) \quad (13)$$

$${}_1F_1\left(L, L+1, -\ln \frac{1}{x}\right) = \begin{cases} x & L=0 \\ x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(L+1)}{\Gamma(L+1+k)} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^k & L \neq 0 \end{cases}$$

其中 ${}_1F_1(a, b, x)$ 是库末合流超几何函数, 将(13)式代入(11)式即得 $\tilde{F}_{qq}(x, t)$.

(2) 因为(11)式右边等于其被积函数在 n 平面各奇点上逆 Mellin 变换的贡献之和, 为此可将 $e^{\frac{A^2 q_s}{n}}$ 按其在各奇点上展开, 并且利用如下关系

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dx x^{-n} \frac{1}{(n+p)^m} = x^p \frac{1}{\Gamma(m)} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{m-1} \quad (14)$$

即可用计算机求得在奇点 $n = 0, -1, -2, \dots$ 上的贡献之和, 从而求得 $\tilde{F}_{qq}(x, t)$.

这两种方法都是把所求结果表示成一个无穷级数之和, 利用计算机计算时, 实际上也只是取足够多项得到相当准确的数值解. 这样, 方法(1)对大 x 区域是较好的近似, 而方法(2)对小 x 区域是较好的近似. 在我们的计算中, 两种方法所得到的结果在 $x \approx 0.05 - 0.5$ 内相当好地自洽一致. 这样不但检验了计算结果的可靠性, 而且表明用第一种方法所得到的(11)式的数值解几乎在整个 x 区域中是足够精确的. 因此, 我们取第一种方法得到的 $\tilde{F}_{qq}(x, t)$ 的结果代入(10)式, 并在相同的初始条件(5)下, 数值求得(10)式的严格解.

图3给出了 u 价夸克的解析解(3)对严格解的相对偏离误差. 计算表明, 在我们目前所讨论的 Q^2 范围内, 由(12)式给出的近似所引起的解的误差是很小的, 所以(3)式是价夸克分布函数所满足的 A-P 方程的足够好的近似解析解.

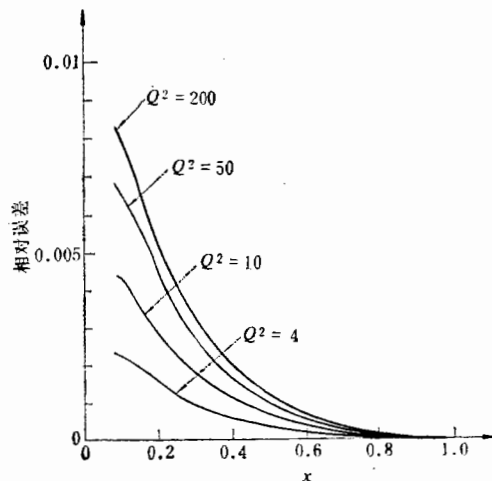


图3 对于 u 价夸克的严格解和近似解析解的相对误差.

参 考 文 献

- 13) [1] J. D. Bjorken, *Phys. Rev.*, **179**(1969), 1547.
 [2] J. I. Fridman, H. W. Kendall, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **22**(1972), 203;
 T. Eichten et al., *Phys. Lett.*, **46B**(1973), 281;
 H. Deden et al., *Nucl. Phys.*, **B85**(1975), 269;
 E. M. Riordan et al., SLAC-1634(1975);
 D. J. Fox et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 1504;
 Y. watanabe et al., *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 898;
 H. L. Anderson et al., *Phys. Rev. Lett.*, **37**(1976), 4;
 P. C. Bosetti et al., Oxford preprint 16/78 (1978).
 [3] J. J. Sakurai, *Phys. Rev. Lett.*, **22**(1969), 981;
 D. Schildknecht, F. Steiner, *Phys. Lett.*, **56B**(1975), 36;
 R. Devenish, D. Schildknecht, *Phys. Rev.*, **D14**(1976), 93.
 [4] G. Preparata, *Phys. Rev.*, **D7**(1973), 2973;
 P. Castorina et al., *Phys. Lett.*, **90B**(1980), 301;
 P. Castorina et al., *Nucl. Phys.*, **B163**(1980), 333.
 (14) [5] A. J. Buras, *Rev. Mod. Phys.*, **52**(1980), 199.
 [6] L. Baulieu, C. Kounnas, *Nucl. Phys.*, **B155**(1979), 429.
 [7] W. B. Atwood Proceedings of Summer Institute on Particle Physics. Quantum Chromodynamics,
 Ed. by Anne Mosher (1980) P. 1
 R. M. Barnett Proceedings of Summer Institute on Particle Physics. Quantum Chromodynamics,
 Ed. by Anne Mosher (1980) P. 416
 [8] G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys.*, **B126**(1977), 298.
 [9] 沈齐兴等, 高能物理与核物理, **7**(1983), 170.
 [10] A. J. Buras, K. J. F. Gaemers, *Nucl. Phys.*, **B132**(1978), 249.
 [11] C. Baltay in Proceedings of Summer Institute on Particle Physics Quantum Chromodynamics,
 Ed. by Anne Mosher (1980) P. 388
 U. Amaldi invited talk at the "Neutrino 79" Conference at Bergen, Norway. (1979. 6)
 [12] J. Steinberger CERN-EP/80-222(1980)

THE QCD BEHAVIOURS OF THE $XF_3 (X, Q^2)$ UP TO THE LEADING LOG IN THE NEUTRINO DEEP- INELASTIC PROCESSES

SHEN QI-XING WU JI-MIN LU JING-XIAN ZHAO PEI-YING

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The QCD behaviours of the structure functions xF_3 in the neutrino deep-inelastic processes are discussed by using the analytic expression for the distribution function of valence quarks in hadrons up to the leading log approximation given by a previous paper⁽⁹⁾. The theoretical predictions are in good agreement with experimental data. The error arising from an approximation in solving the A-P equation is discussed. The calculation shows that relative error remains smaller than 1% even in the case of $Q^2 = 200$ GeV and $x = 0.1$.