第8卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 8, No. 1
1984年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1984

符拉索夫方程,广义泊松方程及色散关系

王 如 琳
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文用二次量子化方法,剩余核场取广义泊松方程形式,导出量子力学中的符拉索夫方程,得出的色散关系在经典近似下与"原子核内的特征振荡"[1]一文中用经典方法得出的色散关系一致.

原子核起初处于平衡状态,这时核子的哈氏函数为 $\mathscr{H}_0(\boldsymbol{r})$,其状态为 $\varphi_i(\boldsymbol{r})$,能量为 E_i. 当小扰动发生,核物质的分布发生一小变化,因而引起一剩余核场 $\mathscr{H}_1(\boldsymbol{r}, t)$,核子的哈氏函数为

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r}t) = \mathscr{H}_0(\boldsymbol{r}) + \mathscr{H}_1(\boldsymbol{r}t)$$

海森堡表象中核子的场算符为

$$\phi(\boldsymbol{r}t) = \sum_i a_i(t)\varphi_i(\boldsymbol{r}). \tag{1}$$

其中 $a_i^+(t)$、$a_i(t)$ 是在 i 态上核子的产生消灭算符,故

$$H = \sum_i E_i a_i^+(t)a_i(t) + \sum_{ij} a_i^+(t)a_j(t)\int d\boldsymbol{r}\varphi_i^*(\boldsymbol{r})\mathscr{H}_1(\boldsymbol{r}, t)\varphi_j(\boldsymbol{r}). \tag{2}$$

用海森堡运动方程,给出 $a_{n'}^+(t)a_n(t)$ 随时间的变化,然后逐项对哈氏函数H的基态 $|0\rangle$ 求平均,并定义:

$$\langle 0|a_{n'}^+(t)a_n(t)|0\rangle = F(n'nt), \tag{3}$$

则

$$\frac{\partial}{\partial t}F(n'nt) = \frac{i}{\hbar}(E_{n'} - E_n)F(n'nt) + \frac{i}{\hbar}\sum_j F(jnt)\langle\varphi_j|\mathscr{H}_1(\boldsymbol{r}t)|\varphi_{n'}\rangle$$
$$-\frac{i}{\hbar}\sum_j F(n'jt)\langle\varphi_n|\mathscr{H}_1(\boldsymbol{r}t)|\varphi_j\rangle. \tag{4}$$

这就是量子力学中的符拉索夫方程[2]. $F(n'nt)$ 类似于分布函数. 根据线性响应

$$F(n'nt) = F_0(n'n)\delta_{nn'} + F_1(n'nt), \tag{5}$$

$F(n'nt)$、$F_0(n'n)$ 是算符 $a_{n'}^+(t)a_n(t)$ 在有剩余核场和无剩余核场之基态上之平均值. $F_1(n'nt)$ 是与剩余核场有关的一级小量,利用(5)式将(4)式线性化,忽略 $\mathscr{H}_1 \cdot F_1$ 二级小量. 并假设 $F_1(n'nt)$ 随时间变化为

本文1983年2月19日收到.

$F_1(n'nt) \sim e^{i\omega t+\eta t}$ η 为一小正值，则

$$F_1(n'nt) = \frac{F_0(n,n) - F_0(n'n')}{\omega\hbar - E_{n'} + E_n - i\eta\hbar} \langle \varphi_n(\boldsymbol{r}) | \mathscr{H}_1(\boldsymbol{r}t) | \varphi_{n'}(\boldsymbol{r}) \rangle. \tag{6}$$

根据(1)式之场算符，定义密度：

$$\rho = \langle 0 | \psi^+(\boldsymbol{r}t)\psi(\boldsymbol{r}t) | 0 \rangle = \sum_{nn'} F(n'nt)\varphi_{n'}^*(\boldsymbol{r})\varphi_n(\boldsymbol{r})$$

由于小扰动引起密度的变化 $\rho_1(\boldsymbol{r}t)$ 相应为

$$\rho_1(\boldsymbol{r}t) = \sum_{nn'} F_1(n'nt)\varphi_{n'}^*(\boldsymbol{r})\varphi_n(\boldsymbol{r}). \tag{7}$$

若剩余核场与 $\rho_1(\boldsymbol{r}t)$ 满足广义泊松方程：

$$(\nabla^2 - k_0^2)\mathscr{H}_1(\boldsymbol{r}t) = -4\pi\mu^2\rho_1(\boldsymbol{r}t). \tag{8}$$

式中 μ^2 相当于相互作用常数．在动量表象中

$$(q^2 + k_0^2)\mathscr{H}_1(\boldsymbol{q}, t) = 4\pi\mu^2\rho_1(\boldsymbol{q}, t). \tag{9}$$

利用富氏变换，将(6)式中之 $\mathscr{H}_1(\boldsymbol{r}t)$、(7)式中之 $\rho_1(\boldsymbol{r}t)$ 变为动量表象、并将(6)式代入(7)式，得

$$\rho_1(\boldsymbol{q}t) = \frac{1}{V}\sum_{nn'} \frac{F_0(nn) - F_0(n'n')}{\omega\hbar - E_{n'} + E_n - i\eta\hbar} \langle \varphi_{n'}(\boldsymbol{r}) | e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} | \varphi_n(\boldsymbol{r}) \rangle$$
$$\times \int d\boldsymbol{q}' \mathscr{H}_1(\boldsymbol{q}'t) \langle \varphi_n(\boldsymbol{r}) | e^{-i\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{r}} | \varphi_{n'}(\boldsymbol{r}) \rangle, \tag{10}$$

取

$$\varphi_n(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\varphi_{n'}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{K}'\cdot\boldsymbol{r}},$$

且将(9)式代入：

$$\rho_1(\boldsymbol{q}t) = \frac{1}{V}\sum_{KK'} \frac{F_0(\boldsymbol{K}) - F_0(\boldsymbol{K}')}{\omega\hbar - E_{K'} + E_K - i\eta\hbar} \cdot \frac{4\pi\mu^2}{(q^2 + k_0^2)} \rho_1(\boldsymbol{q}t)\delta_{K',q+K}. \tag{11}$$

所以在平面波近似下的色散关系为，

$$1 - \frac{4\pi\mu^2}{V(q^2 + k_0^2)} \sum_K \frac{F_0(\boldsymbol{K}) - F_0(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{q})}{\omega\hbar - E_{K+q} + E_K - i\eta\hbar} = 0 \tag{12}$$

将 $F_0(\boldsymbol{K})F_0(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{q})$ 换作速度分布 $f_0(\boldsymbol{v})f_0\left(\boldsymbol{v} + \frac{\hbar\boldsymbol{q}}{m}\right)$，并令系统的体积 V 为无穷大，将(12)式中之求和变为积分．作经典近似

$$\left|\frac{\hbar\boldsymbol{q}}{m}\right| \ll |\boldsymbol{v}|.$$

这样 $f_0\left(\boldsymbol{v} + \frac{\hbar\boldsymbol{q}}{m}\right)$ 可作泰劳级数展开，忽略 q^2 二级以上小项，得色散关系

$$1 - \frac{4\pi\mu^2}{q^2 + k_0^2}\int d\boldsymbol{v} \frac{\boldsymbol{q}\cdot\dfrac{\partial f_0(\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}}}{-\omega + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{q} + i\eta} = 0$$

上式与“原子核内的特征振荡”[1] 一文中、用经典的符拉索夫方程和广义泊松方程所得的色散关系一致.

参　考　文　献

[1] 王如琳，高能物理与核物理，7(1983)，262.
[2] E. G. Harris, Advances in Plasma Physics, 1969, p. 157.

VLASOV EQUATION, GENERALIZED POISSON EQUATION AND DISPERSION RELATION

Wang Ru-lin
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

Abstract

A quantum mechanical analog of the Vlasov equation is derived. If the residual nuclear field is taken as generalized Poisson equation, the dispersion relation is consistent with the classical dispersion relation in Ref. [1].