

用修正标量位计算三维磁场

许永兴 马英杰

(中国科学院近代物理研究所)

摘 要

本文描述了一种三维磁场的计算方法。计算量采用修正标量位,这样在同样的节点数下相对于矢量位它可以减少联立方程的阶数。单元的划分采用任意四面体,从而可以适应磁铁的复杂边界形状,并使最后方程组的系数阵容易形成。在线性情况下,对一个实例磁铁进行了计算,结果相当满意。

一、前 言

自七十年代初以来,用差分法^[1,2]和有限元素法^[3,4]计算二维磁场逐渐成熟。但由于磁铁结构形式的多样性,有些磁铁是很难化为二维问题来计算的,所以三维磁场的计算一直是人们关注的一个问题。综观当今计算磁场的各种方法^[5,6,7],本文提出一种更合理的计算磁场的模式。在同样的节点数目下,用标量位 ϕ 计算所需要的计算机内存,原则上是用矢量位 \mathbf{A} 计算所需内存的1/3。这为提高计算精度及速度提供了可能。网格划分采用四面体单元。这样在联立方程的系数阵形成过程中只须计算代数式,因而比较省时。同时由于四面体适应各种不同磁铁结构的几何形态能力强,因而更具有一般性。在我们看来修正标量位加之四面体单元的网格划分是一种比较好的计算方法。

二、用有限元素法求解磁场

由静磁场的 Maxwell 方程出发并引进修正标量位 $\mathbf{H} = \nabla\phi + \boldsymbol{\xi}$, 则可得一个二阶椭圆型偏微分方程。

$$\nabla \cdot \mu(\nabla\phi + \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (1)$$

考虑到相应边界条件并作线性化处理,则方程(1)的泛函求极值的变分问题为:

$$\begin{cases} T(\phi) = \frac{1}{2} \iiint_V (\mu \nabla^2 \phi + 2\mu \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \phi) dV = \min \\ \phi|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

在整个计算区域中,网格划分采用四面体单元,如图1所示。若采用线性插值函数,则

$$\phi = N_1\phi_1 - N_2\phi_2 + N_3\phi_3 - N_4\phi_4$$

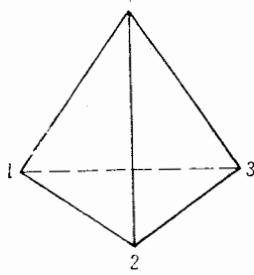


图 1 四面体单元

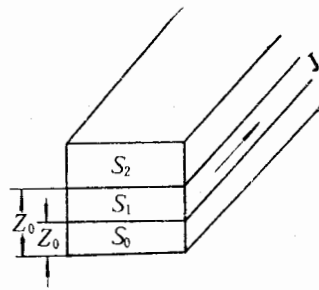


图 2 右端项形成时三种分区

$$N_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)$$

$$i = 1, 2, 3, 4,$$

其中

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$b_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

1, 2, 3, 4 按照相对次序循环轮转. 由(2)式得:

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2} \iiint_V (\mu \nabla^2 \phi + 2\mu \xi \cdot \nabla \phi) dV \right) = 0$$

若区域中单元数为 m , 节点数为 n 则上式为

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\sum_{e=1}^m \frac{1}{2} \iiint_e \mu \nabla^2 \phi dV \right) = - \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\sum_{e=1}^m \iiint_e \mu \xi \cdot \nabla \phi dV \right) \quad (3)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

这样不难得到每个单元对左端系数阵贡献为

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\mu}{36V} (b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j)$$

在(3)式右端项形成中要分三种情况来考虑. 第一种情况是在线圈下面的 S_0 区域中单元. 显然在这些单元中其右端项为零. 第二情况是在线圈里 S_1 区域中单元, 如图 2 所示. 对 1 号节点

$$P_1 = \frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(- \iiint_e \mu \xi \cdot \nabla \phi dV \right)$$

$$= \frac{\mu}{6} (J_1 c_1 - J_2 b_1) [(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)/4 - Z_0]$$

同理可得 P_2, P_3, P_4 . 这里 Z_0 为线圈下端面的 Z 坐标. 第三种情况是在线圈上面的 S_2 区域中单元节点上 P 的分配如下:

$$P_1 = \frac{\mu}{6} (J_1 c_1 - J_2 b_1) (Z_0^* - Z_0)$$

同理可得 P_2, P_3, P_4 . Z_0^* 为整个线圈上端面 Z 坐标.

由有限元素法解磁场问题, 在求解区域离散后, 由泛函求极值即可得一组非线性方程组. 解这方程组在计算机上既耗内存又费时间. 由于三维问题不可避免地节点较多, 并方程中系数阵带宽很宽, 因而用直接法解是会带来不少困难的. 我们这里采用点松弛迭代法. 设方程组为:

$$\sum_{j=1}^K \alpha_{ij} \phi_j = P_i \quad i = 1, 2, \dots, L$$

则

$$\phi_i^{(n+1)} = \phi_i^{(n)} - \rho R_i^{(n)}$$

$$R_i^{(n)} = \left(\sum_{j=1}^K \alpha_{ij} \phi_j^{(n,n+1)} - P_i \right) / \alpha_{ii}$$

这里 ρ 是超松弛因子为大于 1 的数, 可以通过最优化方法获得. 对磁阻率 $\gamma (\gamma = 1/\mu)$ 的选取可采用低松弛方法

$$\gamma^{(n)} = \beta \gamma^{new} + (1 - \beta) \gamma^{(n-1)}$$

β 是小于 1 的数, 可由经验选取. 收敛准则为

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^Q (\phi_i^{(n+1)} - \phi_i^{(n)})^2}{\sum_{i=1}^Q (\phi_i^{(n)})^2}} < \varepsilon$$

ε 一般取 10^{-7} .

三、计算实例

我们对一个 180° 的异形 C 型磁铁进行了计算. 由于磁的镜像对称面和镜像反对称面的存在, 只须计算 1/4 磁铁. 计算区域开始用六面体单元进行网格划分, 如图 3 所示.

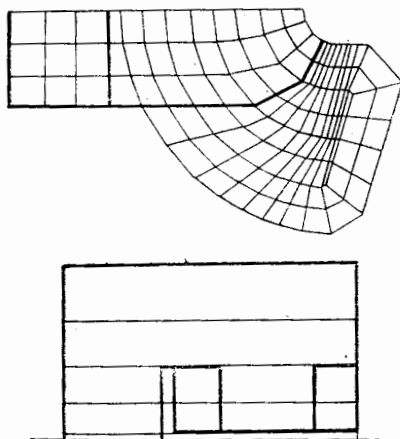


图 3 水平及垂直方向网格划分图

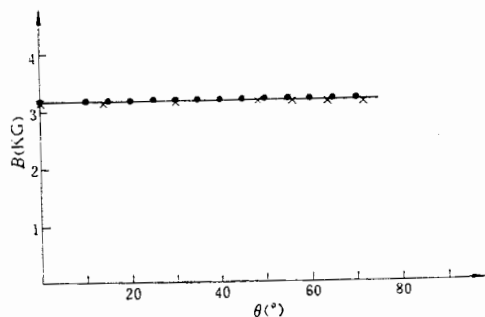


图 4 在均匀场区计算值和实验值的比较

● — 实验测量值
× — 计算值

最后计算的四面体单元是由六面体再划分产生的。最后产生总的节点数为 660 个, 四面体单元为 2520 个。

我们计算了工作气隙磁场强度约为 3KG 时场的分布状态。由于磁场较低, 所以按线性问题来考虑。在磁铁均匀区实测场与计算值的比较示于图 4。其误差约为 1.2—2.2%。对于边缘场的分布, 我们是用有效场边界概念进行比较的。它是磁铁设计中一个重要参数, 其定义为

$$L_M = \int_{-\infty}^{+\infty} B ds / B_0$$

这里 B_0 为磁铁均匀区磁感应强度。对沿着中心轨道的有效场边界, 在我们的实例里, 实验值为 67.23cm, 计算值为 67.85cm, 其相对误差为 0.928%。当收敛误差控制在 10^{-7} 时, 迭代次数为 393 次。随着网格的进一步划细其绝对误差和相对误差还可以进一步缩小。至于非线性问题的解当然要花费更多时间, 但参考文献[2]所讨论的求解方法, 这个问题原则上是可以解决的。

作者感谢刘振浩同志提供了实验数据。作者之一十分感谢复旦大学谷超豪教授和李大潜教授曾给予的指导和帮助。

参 考 文 献

- [1] S. V. Ahamed et al., IEEE, Vol, PAS-85, P. 61.
- [2] 许永兴, 核技术, No.1, p. 43, 1983.
- [3] A. M. Winslow, Proc. Int. Conf. Magnet Technol., P. 170, 1965.
- [4] 许永兴, 马英杰, 1979年全国加速器技术交流会论文选集, p. 377.
- [5] M. J. Newman et al., Proc. 4th Int. Conf. on Magnet, P. 617, 1972.
- [6] S. J. Sackett, Proc. of 3rd Reno Conf. on Magnetic Field at University of Nevada Reno, Nevada, 1971.
- [7] S. Caeymaex, ISR-MA/70-19, CERN, Geneva, Switzerland, 1970.

CALCULATION OF THE 3-DIMENSIONAL MAGNETIC FIELD BY USE OF THE MODIFIED SCALAR POTENTIAL

XU YONG-XING MA YING-JIE

(Institute of Modern Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

A new method for calculating the 3-dimensional magnetic field is described. The modified scalar potential is used to reduce the order of the coupled equations in the comparison with the vector potential under the same node number.

The tetrahedron, which are flexible, are adopted for fitting the complicated boundaries of the magnet. Under the linear situation, the results are fairly satisfactory for a model magnet.