

四维 $SU(5)$ 格点规范理论 Manton 作用量的 Monte Carlo 研究

李文铸 董绍静
(浙江大学)

摘 要

我们用 Monte Carlo 方法研究了四维 $SU(5)$ 格点规范理论的 Manton 作用量的特性,获得了不同于常用的 Wilson 作用量的结果。所得到的平均内能曲线较光滑,没有不连续性,并获得了存在高阶相变的证据。

一、导 言

格点规范理论提供了一个方便的规范不变的非微扰正常化方法^[1]。通常人们希望四维的 $SU(N)$ 格点规范理论能禁闭静止夸克^[1]。为验证这一猜想人们用 Monte Carlo 方法做了很多工作。这些研究的结果表明,当采用通常的 Wilson 作用量时, $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 格点规范理论没有破坏禁闭的相变^[4,5]。而对 $SU(4)$ 和 $SU(5)$ 则有一个人们不希望它出现的一阶相变,每个元格的平均内能明显地不连续^[6,7]。

实际上,格点规范理论的作用量形式不是唯一的,任一作用量只要能导致和 Wilson 作用量相同的连续极限,并保持局域规范不变性,就可以和 Wilson 形式等价^[2]。格点系统的性质应该对于不同的作用量具有一定的普适性^[3,8]。因此,研究作用量的改变对格点性质的影响是很有意义的。N. S. Manton 提出了一个和 Wilson 作用量不同的形式^[9],并已有入对 $SU(2)$ 规范群用 Monte Carlo 方法进行过精确的研究。[9]本文从 Manton 提议的这种作用量出发,对四维的 $SU(5)$ 格点规范理论进行了 Monte Carlo 模拟。计算结果表明,平均内能是连续的,没有一阶相变出现。在 $\beta_c \approx 16.2 \pm 0.2$ 处,有一个高阶相变点。

二、 $SU(N)$ 群 Manton 作用量的实现

我们考虑四维时空超立方格点和周期性边界条件的情况。以 $U(b)$ 表示联结最近邻格点的链变量, $U(b) \in SU(N)$, 以 P 表示格点中的最小方块,即元格,则四维欧氏空间的路径积分为,

$$Z = \int \prod_b dU(b) \exp \left\{ -\beta \sum_P S(U_P) \right\}. \quad (1)$$

其中 β 是耦合常数平方的倒数, $\beta = 2N/g^2$, U_P 是围绕元格 P 的四个链变量的有序积, $U_P = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4$, $dU(b)$ 是 $SU(N)$ 群的 Haar 不变测度, $S(U_P)$ 是元格 U_P 的作用量. Manton 提议的作用量形成是^[8]

$$S(U_P) = \frac{1}{2} [d(U_P, I)]^2, \tag{2}$$

其中 $d(U_P, I)$ 是群空间中由 U_P 到单位元的最短距离. 取群的基础表示, 则 U_P 可以对角化,

$$U_d = g_P U_P g_P^{-1} = \begin{pmatrix} Z_1 & & & 0 \\ & Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Z_N \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$g_P \in SU(N).$

于是 Manton 作用量可写成^[16,17]

$$S(U_P) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\text{Arg } Z_i)^2, \tag{4}$$

其中 $-\pi < \text{Arg } Z_i \leq \pi.$

当格点间距 a 趋于零时, 此形式具有无费米子的 Yang-Mills 场的连续极限.

我们定义 $N \times N$ 矩阵 $\chi_i, i = 1, 2, \dots, N$, 使

$$\begin{aligned} (\chi_i)_{m,n} &= 0 & m, n = 1, 2, \dots, N, (m, n) \neq (i, i), \\ (\chi_i)_{i,i} &= 1. \end{aligned}$$

则有 $\chi_i \chi_i = \delta_{ij} \chi_i, \text{Tr } \chi_i = 1.$

令 $\text{Arg } Z_i = \alpha_i$ 则可得

$$U_d = e^{i\alpha_i \chi_i} \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^N (\text{Arg } Z_i)^2 = \text{Tr} (\alpha_i \chi_i)^2. \tag{6}$$

当格点间距 a 小时, 我们有[1]

$$U_P = \exp\{-iga^2 F_{\mu\nu}^a \lambda_a + \dots\}, \tag{7}$$

其中 λ_a 是 $SU(N)$ 群的生成元, $a = 1, 2, \dots, (N^2 - 1).$ 由(3)式可得

$$U_d = \exp\{-iga^2 g_P (F_{\mu\nu}^a \lambda_a) g_P^{-1} + \dots\}. \tag{8}$$

由(5)式, 略去格点模型自身引起的高阶误差, 易得

$$\alpha_i \chi_i = -ga^2 g_P (F_{\mu\nu}^a \lambda_a) g_P^{-1} \tag{9}$$

则

$$\begin{aligned} S(U_P) &= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\text{Arg } Z_i)^2 \\ &= \frac{1}{2N} \text{Tr} \{g^2 a^4 g_P (F_{\mu\nu}^a \lambda_a) (F_{\mu\nu}^b \lambda_b) g_P^{-1}\} \\ &= \frac{g^2}{2N} \frac{1}{2} a^4 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \end{aligned} \tag{10}$$

导
导

望四
方法
 $U(3)$
它出

son 作
统的
性质
已有
议的
果表
点.

近邻
间的

(1)

所以

$$\beta \sum_P S(U_P) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{4} \int d^4 \times F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (11)$$

这就是无费米子的 Yang-Mills 场连续极限。

由(4)和(6)可知,

$$S(U_P) = \frac{1}{2N} \text{Tr} (\alpha_i \chi_i)^2. \quad (12)$$

求迹运算使规范不变性成为显而易见的。在计算中, Z_i 通过 LU 方法获得^[9]。

三、Monte Carlo 模拟

由于增加了 LU 过程, 在 Manton 形式下, 与某一确定链相联的 6 个元格的作用量又不能作因式分解。因此, $SU(5)$ 群的 Manton 作用量的 Monte Carlo 模拟的工作量远大于通常的 Wilson 形式。为了获得较好的统计数据, 减少计算时间, 我们使用了下列技巧^[10,11]。

1) 先准备一个 400 个 $SU(2)$ 矩阵组成的集合。在 Monte Carlo 模拟过程中, 我们从这个集合中随机选取一个 $SU(2)$ 矩阵 A , 然后将它嵌入到一个 $SU(5)$ 的单位矩阵中去构成一个 $SU(5)$ 矩阵 G , 使得

$$G_{ij} = A_{ij}, \quad G_{ii} = A_{ii}, \quad G_{jj} = A_{jj}, \quad G_{ji} = A_{ji}. \quad (13)$$

这里 $i \neq j$, 取 $i, j = 1, 2, \dots, N$ 。然后将选定的链变量 U , 乘以该矩阵 G 以获得一个随机的新的链变量。这新链变量的取舍仍按 Metropolis 方法进行^[12]。所用的 $SU(2)$ 矩阵集是这样产生的。先在整个 $SU(2)$ 群中随机地选取 200 个带 β 权重的 $SU(2)$ 矩阵(见后面), 然后将这 200 个矩阵和它们的逆矩阵按平移对称从 1 到 400 排列起来,

$$A_{L+200} = A_L^{-1}, \quad (14)$$

其中 $L = 1, 2, \dots, 200$ 。

这样做使产生一个新群元所需的运算从 225 次乘法和加法减少到 30 次, 极大地提高了运行速度。

2) 在格点初始化及产生新群元时预加权重。初始化链变量是这样产生的, 先随机选取 25 个复数, 构成 5×5 矩阵, 然后将对角元的实部乘以当时的 β 值, (若 $\beta \leq 1$ 则不乘) 然后再将矩阵么正么模化, 构成一个带 β 权重的 $SU(5)$ 矩阵。在其它 β 值作运算时, 也将上述的 $SU(2)$ 矩阵集以同样方式做成带 β 权重的。这使产生的新群元也带上相应的权重, 该链相联的各元格的内能分布就更接近于该 β 值下的平衡分布。于是在 Metropolis 方法取样的 Markov 链中被选中的几率增大了, 这就提高了取样效率, 使格点系统较快地达到平衡态, 减小了方差。

具体做法如下。选定一条链, 暂时保持其它链变量不变, 做下列过程:

- (i) 计算与该链相联的 6 个元格内能之和 S_{old} 。
- (ii) 按前述方法产生一个新的链变量, 并计算与之相联的 6 个元格内能之和, S_{new} 。
- (iii) 取一个均匀分布随机数 $0 < r < 1$, 若

$$(11) \quad \gamma > \exp\{-\beta(S_{\text{new}} - S_{\text{old}})\} \quad (15)$$

则保留旧链变量, 否则以新链变量代替旧链变量. 对每一条选定的链变量, 该过程重复 20 次, 以使 (13) 式中的 (i, j) 集取遍区间 $[1, 5]$ 中的全部整数值. 这样构成一条 Markov 链. 然后再按次序转移到下一条链, 重复这一过程. 每修改完一个链变量就获得了一个新的格点组态. 对所有链变量完成一次扫描称为一次 Monte Carlo 迭代.

(12) 这种做法保证我们的取样是按(1)式的权重进行的, 严格的证明可参考附录^[20]. 证明中只要求(14)式成立就可保证是按(1)的配分函数进行模拟的. 这就留下了很大的余地. 若选取更合适的权重来造成 $SU(2)$ 矩阵集, 有可能获得更快的收敛速度.

为了与 M. Creutz 和 H. Bohr 等人的工作相比较, 我们也在 3^4 格点上进行运算. 从 $\beta = 19.0$ 开始, 由带 β 权重的随机组态出发, 对整个格点做 100 次迭代后作为格点的初始组态. 这样使初始态较好地处于平衡, 以减少统计方差. 以后每次 β 变化都很小, 使系统处于准稳态过程中. 由此产生一系列格点组态, 欲求的物理量便在这些组态中求平均,

$$\langle B \rangle = \frac{\int (dU) B e^{-\beta \Sigma S}}{\int (dU) e^{-\beta \Sigma S}} \quad (16)$$

为了减少积累误差造成链变量对么正么模条件的偏离, 每完成 50 次 Monte Carlo 迭代就对所有链变量进行一次标准化处理. 每完成一次迭代就重新产生一个 $SU(2)$ 矩阵集.

四、结果与讨论

1) 每个元格的平均内能如图 1 所示. 每个 β 值上做 20 个 Monte Carlo 迭代. 图中实线是弱耦合展开^[15]. 统计误差可由下式来估算^[9]

$$\Delta E \sim \frac{1}{\sqrt{M-1}} \{ \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle \}^{1/2} \quad (17)$$

在 $14.8 \leq \beta \leq 17.0$ 范围内算得 $\Delta E \leq 3 \times 10^{-3}$. 从图 1 我们可以看到, 与 M. Creutz 及 H. Bohr 等人用 Wilson 作用量测得的结果不同, 内能曲线比较光滑, 没有不连续性.

2) 我们做了热循环模拟, 先让 β 逐渐减小, 再让 β 逐渐增大, 模拟热力学系统的升温

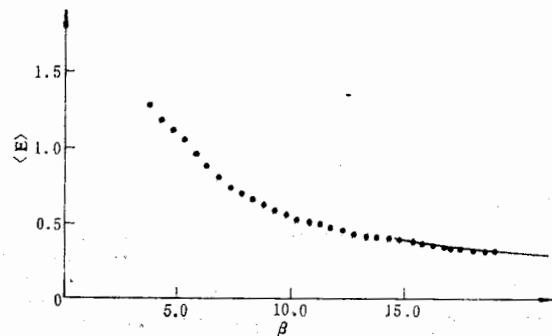


图 1

和降温过程。由于在相变点附近，趋向平衡的驰豫时间变长，因而当迭代次数不十分多时，相变点附近将出现热滞迴线。在 $\beta = 16.2$ 附近，我们找到了一个热滞迴线。结果如图 2 所示，图中竖杠表示观察到的起伏。

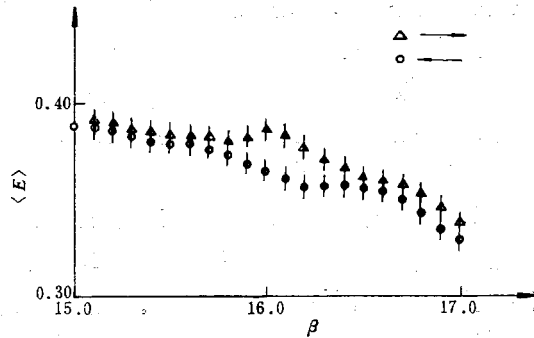


图 2

3) 混合相出发运行。我们在 $\beta = 15.7, 16.1, 16.4, 16.8$ 四点，从一半无序一半有序的格点组态出发，分别做 100 次 Monte Carlo 迭代。这种计算可给出相变点的性质^[13,14]。在一阶相变点上，系统有两个不同的稳定相，一个偏向于无序一个偏向于有序。稍稍偏离相变点，这两个相中就只有一个稳定的。在混合相运行中，经过不多的迭代，两个相中就只有一个达到稳定并取代了另一个，根据 $\beta < \beta_c$ 或 $\beta > \beta_c$ 而使内能分别趋于 E_+ 或 E_- 。高阶相变点则不同，内能是 β 的单值连续函数，在混合相运行中，随 β 越过相变点不会出现倾向无序到倾向有序的突变^[15]。运行结果如图 3 所示。与文献[15]对照可知，这说明图 2 揭示的是高阶相变。C. B. Lang 等人在文献[17]中曾从特征标展开的角度分析了 Manton 作用量与 Wilson 作用量的联系，推测过高阶相变的存在。我们的结果正好与这种推测一致。

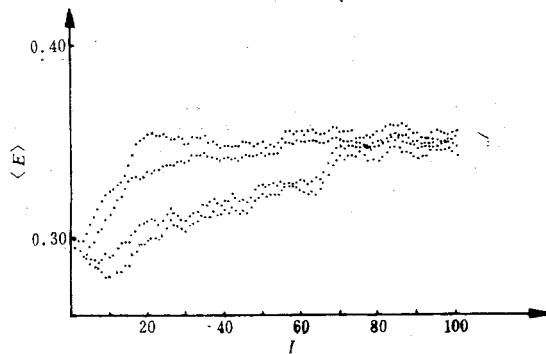


图 3

我们的结果表明，对 $SU(5)$ 格点采用 Manton 作用量时，每个元格的平均内能曲线是平滑的、连续的。在强耦合到弱耦合的过渡中无一阶相变，在 $\beta_c = 16.2 \pm 0.2$ 处有一个高阶相变。这与 M. Creutz 及 H. Bohr 等人采用 Wilson 作用量计算的结果不一样^[6,7]。

感谢汪容教授，季达人老师和我们做的有益的讨论；感谢北京原子能研究所计算机站的同志们的大力协助，本文在该站的 TQ-6 机上运算了 420 小时。

附 录

(1) 式要求的分布函数是

$$f(x) = \frac{\exp\{-\beta\Sigma S(x)\}}{\int dx \exp\{-\beta\Sigma S(x)\}}, \quad (18)$$

$$\int dx f(x) = 1. \quad (19)$$

本文所述方法构造了一个有限,不可约,各态经历的 Markov 过程,其转移概率矩阵 $P_{ij} = P(x_i \rightarrow x_j)$ 为:

$$P_{ij} = \begin{cases} P_2(x_i \rightarrow x_j) \cdot f(x_j)/f(x_i), & f(x_j) < f(x_i), \\ P_2(x_i \rightarrow x_j), & f(x_j) \geq f(x_i), \end{cases} \quad (20)$$

并有对一切 x_i 的归一性

$$\int P_{ij} dx_j = 1. \quad (21)$$

由(20)立即可得

$$P_{ji} = \begin{cases} P_2(x_j \rightarrow x_i), & f(x_j) < f(x_i), \\ P_2(x_j \rightarrow x_i) \cdot f(x_i)/f(x_j), & f(x_j) \geq f(x_i). \end{cases} \quad (22)$$

$SU(2)$ 矩阵集的特殊构造方法(14)式保证了

$$P_2(x_i \rightarrow x_j) = P_2(x_j \rightarrow x_i). \quad (23)$$

由(20),(22),(23)三式可得

$$P_{ij} \cdot f(x_i) = P_{ji} \cdot f(x_j). \quad (24)$$

这就是我们这一过程的精细平衡条件. 对(24)式两边积分,由(21)式可得

$$f(x_j) = \int P_{ij} f(x_i) dx_i. \quad (25)$$

此积分方程可用迭代法求解

$$f^{(m)}(x_j) = \int P_{ij} f^{(m-1)}(x_i) dx_i. \quad (26)$$

若初始组态为 S_1 分布,则 m 次迭代后有

$$f^{(m+1)}(x_j) = \int dx_1 \int \dots \int dx_m S_1 \cdot P_{12} \dots P_{mj}. \quad (27)$$

再看我们构造的马尔科夫链中有

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$$

$$f_2(x_2) = \int S_1(x_1) P_{12}(x_1 \rightarrow x_2) dx_1, \quad (28)$$

$$f_{m+1}(x_{m+1}) = \int dx_1 \int \dots \int dx_m S_1 P_{12} \dots P_{m,m+1}, \quad (29)$$

比较(29)与(27)有

$$f_{m+1}(x_j) = f^{(m+1)}(x_j). \quad (30)$$

由于数字计算机的特点,(18)式的分布在计算时自然成为一离散分布. J. M. Hammersley 在文献 [20]中证明了,在这种情况下(26)式收敛,于是有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x_j) = f(x_j). \quad (31)$$

这就是说,我们构造的马氏链导致如(18)式的极限分布.

·分多
果如

有序
[13,14].
当偏离
~相中
 E_+ 或
点不
口, 这
度分
正好

由线是
一个高
n.
计算机站

参 考 文 献

- [1] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, D10(1974), 2445.
 [2] J. Villian, *J. de Phys.*, 36(1975), 581.
 [3] J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, 51(1979), 659.
 [4] B. Lautrip, M. Nauenberg, *Phys. Rev. Lett.*, 45(1980), 1775.
 [5] R. C. Edgar, L. Mc Crossen, K. J. M. Moriarty, *J. Phys.*, G7 (1981), L85.
 [6] M. Creutz, *Phys. Rev. Lett.*, 46 (1981), 1441.
 [7] H. Bohr, K. J. M. Moriarty, *Phys. Lett.*, 104B(1981), 217.
 [8] N. S. Manton, *Phys. Lett.*, 96B(1980), 328.
 [9] C. B. Lang, C. Rebbi, P. Salomonson, B. S. Skagerstam, *Phys. Lett.*, 101B (1981), 173.
 [10] M. Okawa, *Phys. Rev. Lett.*, 49(1982), 353.
 [11] N. Cabibbo, E. Marinari, *Phys. Lett.*, 119B (1982), 387.
 [12] N. Metropolis, et. al., *J. Chem. Phys.*, 21(1953), 1087.
 [13] C. Rebbi, *Phys. Rep.*, 67 (1980), 55.
 [14] C. Rebbi, *Phys. Rev.*, D21 (1980), 3350.
 [15] M. Creutz, *Phys. Rev. Lett.*, 43(1979), 553.
 [16] C. B. Lang et al., *Nucl. Phys.*, B190 F. S (1981), 337.
 [17] C. B. Lang et. al., *Phys. Rev.*, D26 (1982), 2028.
 [18] B. Grossman, S. Samuel, *Phys. Lett.*, 120B (1983), 383.
 [19] V. N. Faddeeva, "Computational Methods of Linear Algebra" Dover Publications, New York (1959).
 [20] J. M. Hammersley, D. C. Handscomb, "Monte Carlo Methods" Methuen and CO. London (1964).

MONTE CARLO STUDY OF MANTON'S ACTION FOR FOUR-DIMENSIONAL $SU(5)$ LATTICE GAUGE THEORY

LI WEN-ZHU DONG SHAO-JING
(Department of Physics, Zhejiang University)

ABSTRACT

The feature of Manton's lattice action in the $SU(5)$ four-dimensional lattice gauge theory is investigated by means of Monte Carlo simulation. A rather smooth curve of the internal energy is obtained, no discontinuity in the average action per plaquette is found in opposition to the results of usually adopted Wilson's action. An evidence of a higher order phase transition with Manton's action is also found.

又

下的
但做
简化
理论

可化

由于
将无
模型

(1)是
和 N
了的。