

极化光子的结构函数

徐 在 新

(华东师范大学)

摘 要

在满足有非齐次项的演化方程的假定下, 求出了极化光子的分布函数和碎裂函数的矩. 然后利用雅可比多项式作级数展开, 求出了它们的用多项式表示的明显形式, 并具体给出了三项式、五项式及七项式表示.

一、分布函数和碎裂函数的矩

对于极化光子的分布函数, 可定义如下自旋差分布

$$\Delta G_{q_i/\gamma} \equiv G_{q_i(+)/\gamma(+)} - G_{q_i(-)/\gamma(+)}, \quad (1.1)$$

$$\Delta G_{g/\gamma} \equiv G_{g(+)/\gamma(+)} - G_{g(-)/\gamma(+)}. \quad (1.2)$$

假定螺旋度确定的分布函数满足具有一非齐次项的 Altarelli-Parisi (AP) 型演化方程^[1], 则自旋差分布满足如下演化方程:

$$\frac{d\Delta G_{q_i/\gamma}}{dt} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} [\Delta G_{q_i/\gamma} \otimes P_{qq} + \Delta G_{g/\gamma} \otimes \Delta P_{qg}] + \frac{\alpha}{2\pi} e_i^2 \Delta P_{q\gamma}, \quad (1.3)$$

$$\frac{d\Delta G_{g/\gamma}}{dt} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^{2f} \Delta G_{q_j/\gamma} \otimes \Delta P_{gq} + \Delta G_{g/\gamma} \otimes \Delta P_{gg} \right], \quad (1.4)$$

其中 $t = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$, $\Delta P_{q\gamma} = 6\Delta P_{qg}$.

为了求解方程 (1.3)、(1.4), 可采用非极化光子情况下的类似方法. 把 $\Delta G_{q_i/\gamma}$ 分解为非单态和单态两部分, 取矩后不难求得它们的解^[2]:

$$\Delta G_{q_i/\gamma}(n, Q^2) = \frac{\alpha \tilde{d}_{q\gamma}(n)}{\alpha_s(t)} \left[\frac{e_i^2 - \langle e^2 \rangle}{1 - \tilde{d}_{qq}(n)} + \langle e^2 \rangle \frac{1 - \tilde{d}_{gg}(n)}{(1 - \tilde{d}^+(n))(1 - \tilde{d}^-(n))} \right], \quad (1.5)$$

$$\Delta G_{g/\gamma}(n, Q^2) = \frac{\alpha \tilde{d}_{q\gamma}(n) 2f \langle e^2 \rangle \tilde{d}_{gq}(n)}{\alpha_s(t) (1 - \tilde{d}^+(n))(1 - \tilde{d}^-(n))}, \quad (1.6)$$

其中 $\Delta G_{A/\gamma}(n, Q^2)$ 为 $\Delta G_{A/\gamma}(x, Q^2)$ 的第 n 次矩.

由螺旋度确定的夸克和胶子演化而产生的螺旋度确定的光子的分布, 即碎裂函数用 $D_{\gamma(+)/q_i(+)}$ 、 $D_{\gamma(-)/q_i(+)}$ 、 $D_{\gamma(+)/g(+)}$ 及 $D_{\gamma(-)/g(+)}$ 表示. 类似地, 有

$$\frac{d\Delta D_{\gamma/q_i}}{dt} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} [\Delta D_{\gamma/q_i} \otimes \Delta P_{qq} + \Delta D_{\gamma/g} \otimes \Delta P_{gq}] + \frac{\alpha}{2\pi} e_i^2 \Delta P_{\gamma q}, \quad (1.7)$$

$$\frac{d\Delta D_{\tau/g}}{dt} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^{2f} \Delta D_{\tau/q_j} \otimes \Delta P_{qg} + \Delta D_{\tau/g} \otimes \Delta P_{gg} \right], \quad (1.8)$$

其中我们定义自旋差碎裂函数为

$$\Delta D_{\tau/q_i} \equiv D_{\tau(+)/q_i(+)} - D_{\tau(-)/q_i(+)}, \quad (1.9)$$

$$\Delta D_{\tau/g} \equiv D_{\tau(+)/g(+)} - D_{\tau(-)/g(+)}, \quad (1.10)$$

且可以证明, $\Delta P_{\tau q} = \frac{3}{4} P_{gq}$.

用类似的方法可求得式 (1.7) 和 (1.8) 的解, 为

$$\Delta D_{\tau/q_i}(n, Q^2) = \frac{\alpha_s \tilde{d}_{\tau q}(n)}{\alpha_s(t)} \left[\frac{e_i^2 - \langle e^2 \rangle}{1 - \tilde{d}_{qq}(n)} - \langle e^2 \rangle \frac{1 - \tilde{d}_{gg}(n)}{(1 - \tilde{d}^+(n))(1 - \tilde{d}^-(n))} \right], \quad (1.9)$$

$$\Delta D_{\tau/g}(n, Q^2) = \frac{\alpha_s \tilde{d}_{\tau q}(n) \langle e^2 \rangle \tilde{d}_{qg}(n)}{\alpha_s(t) (1 - \tilde{d}^+(n))(1 - \tilde{d}^-(n))}, \quad (1.10)$$

其中 $\Delta D_{\tau/A}(n, Q^2)$ 为 $\Delta D_{\tau/A}(x, Q^2)$ 的第 n 次矩. 若取 $N=3, f=4$, 有

$$\Delta D_{\tau/g} = \frac{1}{8} \Delta G_{g/\tau}. \quad (1.11)$$

二、多项式表示

定义在区间 $0 \leq x \leq 1$ 内的任何函数都可用一正交多项式级数展开. Nicolaidis 根据光子结构函数的奇性行为选择雅可比多项式作为基, 从而得到了用多项式表示的光子结构函数^[3].

我们现在采用类似方法讨论极化光子结构函数. 为此, 首先需分析 $x \rightarrow 0$ 时的性质. 从 Mellin 逆变换来看, 对于小 x 值, 结构函数的领头行为决定于它的矩在复 n 平面上最右侧奇点. 由 (1.5)、(1.6) 及 (1.9)、(1.10) 可知, 这奇点发生在 $1 - \tilde{d}^+(n_0) = 0$, 即 $n_0 = 0.99995 \simeq 1$ 处.

类似于光子结构函数, 我们设

$$\Delta G_{A/\tau}(x, Q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \Delta f_{A/\tau}(x), \quad (2.1)$$

$$\Delta D_{\tau/A}(x, Q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \Delta f_{\tau/A}(x). \quad (2.2)$$

这里应当指出, 在 QED 中光子结构函数与 $t = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$ 的这种正比关系是可以严格证明的. 在 QCD 中, 人们发现强作用并不修正这种正比关系, 但将极大地改变对于 x 的依赖关系^[4]. 在得到解 (1.5)、(1.6) 及 (1.9)、(1.10) 时我们实际上已经使用了上述假设. 于是类似于文献 [3], 可令

$$x \Delta f_{A/B}(x) = \sum_{n=0}^N b_n P_n(x), \quad (2.3)$$

其中雅可比多项式为

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n p(n, k) x^k, \quad (2.4)$$

$$\text{而: } p(n, k) = (-1)^{k+n} (2n+1)^{1/2} \frac{(n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!} \quad (2.5)$$

由式(4.3)并利用 $P_n(x)$ 的正交性

$$\int_0^1 dx P_n(x) P_m(x) = \delta_{nm}, \quad (2.6)$$

可得:

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^1 dx x \Delta f_{A/B}(x) P_n(x) = \sum_{k=0}^n p(n, k) \int_0^1 dx x^{k+1} \Delta f_{A/B}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n p(n, k) \Delta f_{A/B}(k+2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

值得注意的是,式(2.3)和(2.4)还可表示为

$$x \Delta f_{A/B}(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^n, \quad (2.8)$$

其中:

$$c_n = \sum_{l \geq n} b_l p(l, n). \quad (2.9)$$

利用式(2.8)、(2.9)以及(2.5)、(2.7)、(1.5),可得到用多项式表示的极化光子自旋差分布 $x \Delta f_{q/r}(x)$ 。当 $e_i^2 = 4/9$ 时,其三项式及五项式的结果为

$$x \Delta f_{q/r} = -0.06526 + 0.20084x + 0.13032x^2, \quad (2.10)$$

$$x \Delta f_{q/r} = -0.01958 - 0.24072x + 0.70337x^2 + 0.68408x^3 - 0.93188x^4. \quad (2.11)$$

在图1中除了显示三项式和五项式结果外,还给出了七项式结果。可以看出,在动量百分比 x 较小 ($x \leq 0.30$) 的区域, $\Delta f_{q/r} < 0$, 这表明极化光子演化为螺旋性相同的 u 夸克或 c 夸克的几率比演化为螺旋性相反的几率小; 在 x 较大 ($x \geq 0.35$) 区域, $\Delta f_{q/r} > 0$, 情况恰巧相反。

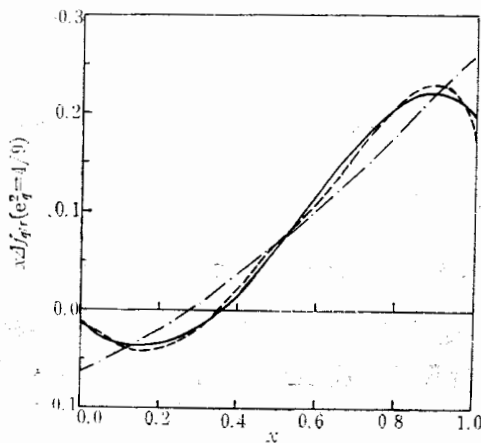


图1 极化光子中夸克 ($e_i^2 = 4/9$) 的自旋差分布函数。图中点划线、实线及虚线分别表示三项式、五项式及七项式

对于 $e_i^2 = 1/9$ 的夸克,其三项式及五项式结果为

$$x \Delta f_{q/r} = -0.01557 + 0.05122x + 0.03042x^2, \quad (2.12)$$

$$x \Delta f_{q/r} = -0.00482 - 0.05099x + 0.15210x^2 + 0.18701x^3 - 0.23486x^4. \quad (2.13)$$

这些结果与七项式分布表示在图2。可以看出,结果与图1相当类似,但数值上小得多。

极化光子演化为胶子的自旋差分布为

$$x \Delta f_{g/r} = 0.056481 + 0.11760x - 0.19527x^2 \quad (2.14)$$

$$x \Delta f_{g/r} = 0.02048 + 0.62518x - 1.8415x^2 + 1.8528x^3 - 0.66089x^4. \quad (2.15)$$

上述结果及七项式分布表示在图3中。根据式(1.11)这些结果也反映了极化胶子演化为光子时的自旋差碎裂函数。从图3中可以看

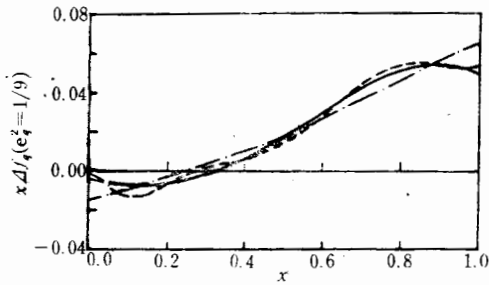


图 2 极化光子中夸克 ($e_q^2 = 1/9$) 的自旋差分布函数。图中点划线、实线及虚线分别表示三项式、五项式及七项式

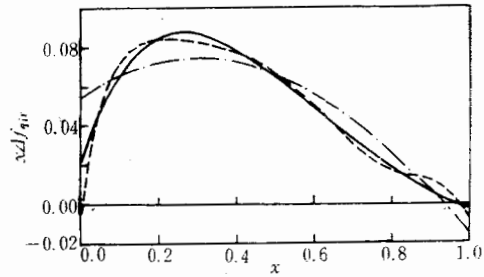


图 3 极化光子中胶子的自旋差分布函数。图中点划线、实线及虚线分别表示三项式、五项式及七项式

出, 除 $x \rightarrow 1$ 的很小区域外, $\Delta f_{B/Y}$ 及 $\Delta f_{\tau/E}$ 几乎在整个区域都为正。

对于 $e_q^2 = 4/9$ 的极化夸克演化为光子的情况, 其自旋差碎裂函数为

$$x\Delta f_{\tau/q} = -0.00932 - 0.09048x + 0.08298x^2, \quad (2.16)$$

$$x\Delta f_{\tau/q} = -0.00627 - 0.14484x + 0.30762x^2 - 0.32690x^3 + 0.15492x^4 \quad (2.17)$$

上述结果及七项式结果表示在图 4 中。

最后我们给出 $e_q^2 = 1/9$ 的极化夸克碎裂为光子的结果:

$$x\Delta f_{\tau/q} = -0.02668 - 0.38836x + 0.34818x^2, \quad (2.18)$$

$$x\Delta f_{\tau/q} = -0.01215 - 0.6484x + 1.4268x^2 - 1.5735x^3 + 0.74951x^4. \quad (2.19)$$

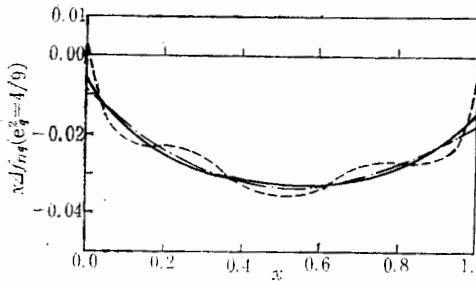


图 4 极化夸克 ($e_q^2 = 4/9$) 演化为光子的自旋差碎裂函数。图中点划线、实线及虚线分别表示三项式、五项式及七项式

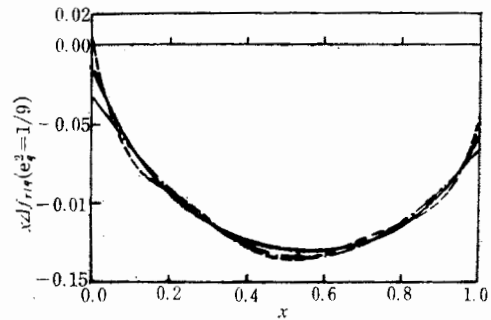


图 5 极化夸克 ($e_q^2 = 1/9$) 演化为光子的自旋差碎裂函数。图中点划线、实线及虚线分别表示三项式、五项式及七项式

这些结果及七项式结果显示在图 5 中。从图 4 及图 5 可以看出, 极化夸克演化为光子的自旋差碎裂函数除 $x \rightarrow 0$ 处外都小于零; 而且对于 d 或 s 夸克, 其值比 u 或 c 夸克大得多。

三、讨 论

应当指出, 在得到 (2.10)~(2.19) 的数值计算中由于取不同的有效位数或取不同的

计算程序会影响所得到的多项式系数的值,但是这并不明显影响整个分布.

其次,求得了极化光子的自旋差分布后,还可以计算例如极化电子演化为夸克或胶子的自旋差分布. 因为

$$G_{q_i(+)/e(+)} = G_{q_i(+)/\tau(+)} \otimes G_{\tau(+)/e(+)} + G_{q_i(+)/\tau(-)} \otimes G_{\tau(-)/e(+)}, \quad (3.1)$$

$$G_{q_i(-)/e(+)} = G_{q_i(-)/\tau(+)} \otimes G_{\tau(+)/e(+)} + G_{q_i(-)/\tau(-)} \otimes G_{\tau(-)/e(+)}, \quad (3.2)$$

利用 QED 和 QCD 中宇称守恒,于是有

$$\Delta G_{q_i/e} = \Delta G_{q_i/\tau} \otimes \Delta G_{\tau/e}, \quad (3.3)$$

其中:

$$\Delta G_{\tau/e} = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{4m_e^2} \left[\frac{1 - (1-x)^2}{x} \right]. \quad (3.4)$$

最后我们应当指出,迄今已有作者讨论了非极化光子演化为夸克和胶子过程中的高阶效应对分布函数的影响^[5], 以及在求解 AP 型方程时边界条件的影响^[6]. 本文对于极化情况的讨论中,尚未考虑这些问题.

参 考 文 献

- [1] C. H. Llewelly Smith, *Phys. Lett.*, **79B** (1978), 83; R. J. Dewitt et al., *Phys. Rev.*, **D19** (1979), 2046; G. Altarelli, *Phys. Reports*, **81** (1982), 1.
- [2] Zai-Xin Xu, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 1440.
- [3] A. Nicolaidis, *Nucl. Phys.*, **163** (1980), 156.
- [4] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B120** (1977), 189.
- [5] W. A. Bardeen and A. J. Buras, *Phys. Rev.*, **D21** (1980), 2041 (E).
- [6] M. Gluck and E. Reya, *Phys. Rev.*, **D28** (1983), 2749.

POLARIZED PHOTON STRUCTURE FUNCTIONS

XU ZAI-XIN

(East China Normal University)

ABSTRACT

By assuming that the polarized parton distributions and the polarized parton fragmentation functions in a photon satisfy an inhomogenous evolution equation, their moments are obtained. Explicit expressions for these moments are introduced by using series expansion of Jacobian polynomials. The 3-term, 5-term and 7-term expressions are given.