

卵形体作为裂变形状的检验

戴光曦 刘希明 刘国兴

(中国科学院近代物理研究所)

摘 要

用双形变参数的卡西尼亚卵形回转体来描述核的对称与非对称裂变过程,是简洁而直观的。本文基于标准液滴模型,算出双形变参数卵形体的通用库仑能和表面能,并以幂级数多项式来表达。为了从物理上检验卵形体的近似性,在不用任何其他可调参数的情况下,它所预示的裂变鞍点处的有效转动惯量、裂变阈以及断点处的裂片总动能均与实验结果符合。本文还给出了卵形体的转动惯量解析表达式。

一、引 言

裂变必然要经过出现脖子的大形变阶段。核的小形变,均用勒襄得多项式的幂级数展开进行,如四极或八极形变等。但裂变大形变,采用此法,需要取十几项甚至更多的高阶勒襄得多项式展开式作逼近,就会引入很多参数;而且尚未证明这种作法是正确的。

在[1]的著作中首次提出用卡西尼亚卵形体来描述对称裂变过程,并计算了对称裂变的库仑能。基于此在[2]的工作中引入斯突金斯基的壳校正能量,计算了铀系核的裂变位能面,从而预示了非对称裂变的趋向。

近年来重离子引起的复合核裂变和准裂变的实验,表明裂变的平均总动能符合维阿拉^[3]的系统经验公式。由于平均总动能反映了裂变断点的形状,在[4]的工作中,选取半径常数 $r_0 = 1.2\text{fm}$ 时,用双纽线回转体(即卵形体的特例)作为断点形状,可推导出维阿拉经验公式来。值得注意的是,这种断点形状与两球相切形状差别是很大的。

本文基于传统的过渡态鞍点模型(TSM),来考察用卵形体所预示的鞍点有效转动惯量和裂变阈,并和实验数据进行比较。在简单回顾了卡西尼亚卵形体几何以后,给出了计算转动惯量、单个裂片的质心等公式;并将库仑能计算结果用对称形变参数作幂多项式表示,给出拟合系数。这样就为以后唯象地加入壳效应和对效应的位能面计算提供通用的库仑能表达式。在高自旋态复合核裂变时,由于鞍点形状近于球形,从而使有效转动惯量 $J_{\text{eff}} \rightarrow \infty$;使得 TSM 在解释裂片角分布上碰到困难。有人提出唯象统计断点模型(SSM),试图用断点新生裂片的能级密度来代替鞍点处的能级密度。本文提供的断点形状相关的形变、转动惯量等,对 SSM 的具体计算也有一定的参考价值。

二、卡西尼亚卵形回转体几何

在柱坐标中 (z, ρ, φ) , 卵形体可表示为:

$$a^4[(z^2 + \rho^2)^2 - 2\varepsilon^2(z^2 - \rho^2) + \varepsilon^4 - 1] = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (1)$$

式中 ε 为对称形变参数, z 和 ρ 是以 a 为单位的变量。在体积守恒下, a 是 ε 的函数:

$$a(\varepsilon) = a_0 f_a(\varepsilon) = a_0 \left\{ 4 \sqrt{1 + \varepsilon^2} (1 - 2\varepsilon^2) + \frac{3}{\varepsilon} \ln \left(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2} \right) \right\}^{\frac{1}{3}}, \quad (2)$$

式中 $a(0) = r_0 A^{\frac{1}{3}} = a_0$; 显然 $\varepsilon = 0$ 时是球形, $\varepsilon = 1$ 时是双纽线回转体, $a(1) = 1.48159 a_0$, 它表示了断点形状。

ε 从 0 变到 1, 使核从球形变到出现脖子 ($\varepsilon > 1/\sqrt{2}$), 再变到断点。在小形变时, ε 与通常尼尔逊形变参数 δ 的关系是:

$$\delta = f_\delta(\varepsilon) [\sqrt{1 + \varepsilon^2} - \sqrt{1 - \varepsilon^2}] \approx f_\delta(\varepsilon) \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{8} \varepsilon^6 \right). \quad (3)$$

从(1)式知,卵形体在围绕 z 轴和 ρ 轴穿过原点的转动惯量,分别为 J_{\parallel} 和 J_{\perp} , 其解析式为:

$$J_{\parallel}/J_0 = 1.875 f_J^{\parallel}(\varepsilon) \left\{ \sqrt{1 + \varepsilon^2} \left(\frac{23}{40} - \frac{1}{10} \varepsilon^2 + \frac{1}{5} \varepsilon^4 - \frac{1}{16\varepsilon^2} \right) + \left(\frac{1}{16\varepsilon^2} - \varepsilon \right) \ln \left(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2} \right) \right\}, \quad (4)$$

$$J_{\perp}/J_0 = 1.875 f_J^{\perp}(\varepsilon) \left\{ \sqrt{1 + \varepsilon^2} \left(\frac{41}{80} - \frac{1}{60} \varepsilon^2 + \frac{1}{30} \varepsilon^4 + \frac{1}{32\varepsilon^2} \right) - \left(\frac{1}{32\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \varepsilon \right) \ln \left(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2} \right) \right\}, \quad (5)$$

式中 J_0 为球形核转动惯量: $\frac{2}{5} M a_0^2$, M 为质量数为 A 的核的质量。值得提出的是, J_{\parallel} 在 $\varepsilon \sim 0.94$ 处有极小值, 尔后在达到断点前略有增加。这与工作[1]给出的 J_{eff}/J_0 是一致的。在断点处 J_{\parallel}, J_{\perp} 和 $J_{\text{eff}} \left(= \frac{J_{\perp} \cdot J_{\parallel}}{J_{\perp} - J_{\parallel}} \right)$ 分别为 $0.5343 J_0, 4.3412 J_0$ 和 $0.6093 J_0$ 。

半支卵形体其质心偏离原点的距离为

$$z_c(\varepsilon) = z_c(0) \left(1 - \frac{1}{3} \varepsilon^4 \right) f_{z_c}(\varepsilon), \quad (6)$$

在此, $z_c(0) = 0.375 a_0$ 是半球质心。断点时 $z_c(1) = 1.20463 a_0$ 。假定断点到收缩为两个球的时间很短, 可忽略 $z_c(1)$ 的变化, 则对称裂变的平均总动能可用库仑互作用能表示:

$$E_{\text{TRKE}} = \frac{e^2(Z/2)^2}{2z_c(1)} = 0.124 Z^2 / A^{\frac{1}{3}}, \quad (7)$$

它与最近准裂变系统实验总结的结果^[5]一致。

时半为

这变这

在

的
z:

显

这

推广到非对称裂变, 引入质量非对称参数 $p, p = A_1/A_2, A = A_1 + A_2, A_1 < A_2$. 这时卵形体在 $z = 0$ 平面左右分成两支: $z > 0$ 的一支是由 $2A_2$ 质量数构成的卵形体的一半, $z < 0$ 的一支是 $2A_1$ 卵形体的一半; 而在 $z = 0$ 处两支卵形体光滑联接, 联接条件为:

$$a_1^2(\varepsilon_1)(1 - \varepsilon_1^2) = a_2^2(\varepsilon_2)(1 - \varepsilon_2^2), \quad (8)$$

数:

这时 $a_i(\varepsilon_i) = f_i(\varepsilon_i)a_{0i}, a_{0i} = (2A_i)^{\frac{1}{2}}r_0, (i = 1, 2)$. 由于(8)式的联接条件, 使自由形变参数仅有两个: ε_1 和 p , 变化范围均为 $0-1$. 但对于不同 p 值, ε_2 取值从 ε_{\min} 到 1, 这时

$$\varepsilon_{\min} = \left\{ 1 - \frac{p^{\frac{3}{2}}}{f_1^2(\varepsilon_{\min})} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

在图 1 中显示了不同 p 值下 ε_2 依赖于 ε_1 值的曲线族。

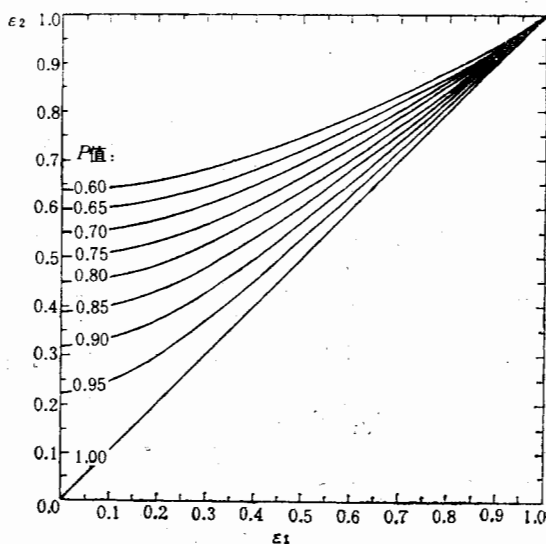


图 1 在不同非对称参数 $p (= A_1/A_2)$ 时, ε_2 依赖于 ε_1 的关系曲线

在图 2 中显示了 $p = 0.7$ 的非对称形变的卵形体剖面图, 该图是根据不同 ε_1 值作出的。从图可见, 这种非对称形变, 总质心不在 $z = 0$ 处, 而是偏向重裂片 A_2 一侧, 它距离 $z = 0$ 处为 $z_{tc}(\varepsilon_1)$:

$$z_{tc}(\varepsilon_1) = z_c(\varepsilon_2) \frac{1}{p+1} - z_c(\varepsilon_1) \frac{p}{p+1}. \quad (10)$$

显然, 穿过总质心的转动惯量:

$$J_1^p = \frac{1}{2} [J_1(a_1, \varepsilon_1) + J_1(a_2, \varepsilon_2)] - z_{tc}^2(\varepsilon_1) \cdot M, \quad (11)$$

$$J_1^p = \frac{1}{2} [J_{II}(a_1, \varepsilon_1) + J_{II}(a_2, \varepsilon_2)]. \quad (12)$$

这样在给定的 p, ε_1 下, 从(8)式算出 ε_2 后就可由(6)、(4)和(5)分别算出 $z_c(\varepsilon_i)$ 和 J_{II} 与 J_1 , 从而得到 z_{tc} 和 J_1^p 与 J_{II}^p 值。

形变时,

(3)

其解析

(4)

(5)

是, J_{II}

J_1/J_0 是

J_0 .

(6)

缩为两
用能表

(7)

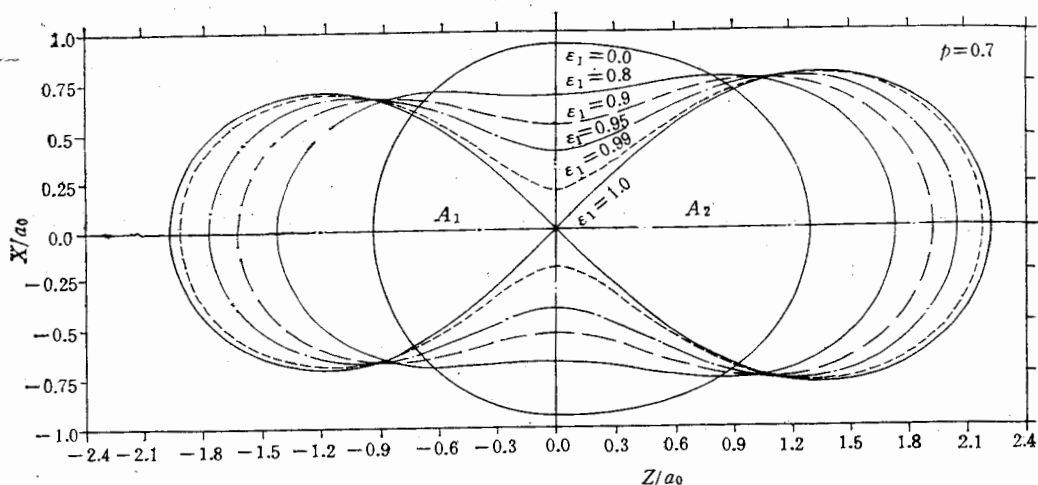


图 2 非对称形变 ($p = 0.7$) 的卵形体剖面图, 注意在 $\varepsilon_1 > 0.8$ 后出现脖子的大形变才明显发生

三、卵形体库仑能、表面能及其幂多项式

对称卵形体库仑能可表示成:

$$E_c/E_\infty = \frac{1}{2} \frac{45}{48} \frac{1}{x^2} f_p(\varepsilon) \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \frac{dV_1 dV_2}{|r_1 - r_2|}, \quad (13)$$

在此, E_∞ 为球的库仑能. 为了给出相同权重, 采用直角坐标系. 同时为了消除旋转对称而出现计算上的重复性, 而将全体积在 $z = 0, x = 0$ 和 $y = 0$ 分割成八块. 积分仅在一小块内(得到自能)和块与块之间(得到互作用能)进行. 这样减少了计算时间.

计算时将 $z = 0$ 平面把卵形体分成两块, 分别计算两块间的互作用库仑能 $E_c(\text{互})$ 和各块自库仑能之和 $E_c(\text{自})$, 并将它们加起来. 对称裂变时, $E_c(\text{自})/E_\infty$ 将从 0.5984 ($\varepsilon = 0$) 到 0.6241 ($\varepsilon = 1$) 变化, 并在 $\varepsilon = 0.964$ 时出现最小值 0.6207. 非对称裂变时, 由于 $E_c(\text{自})$ 对于各个 ε 的值已经有了, 仅作 $E_c(\text{互})$ 计算即可, 这样又大大缩短计算时间.

表面能 $E_s(\varepsilon_1, p)/E_{s0}$ 的计算归结于计算卵形体的表面积. 这时采用球坐标比较方便, 对称情况,

$$E_s(\varepsilon, 1)/E_{s0} = f_s(\varepsilon) \left[1 + \varepsilon^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta \sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - (2\varepsilon^2 \sin \theta \cos \theta)^2}} \right], \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \quad (14)$$

在 $\varepsilon = 1$ 时, 可以积分出, 得到该比值为 1.285864, 它比分开为两个球时的 1.260 要大 2.6%. 显然在 $p = 0$ 的极限, $E_s/E_{s0} = 1.0205$; 这是从球变成卵形体 ($\varepsilon = 1$) 断点时的一支形状的表面能的值.

为了方便, 用 ε^2 的幂多项式来逼近上面的计算结果, 这时

$$E_c(\varepsilon_1, p)/E_\infty = \sum_{K=0}^5 \alpha_{p,K} \varepsilon_1^{2K}, \quad (15)$$

$$E_c(\epsilon_1, \rho)/E_{c0} = \sum_{K=0}^5 \beta_{p,K} \epsilon_1^{2K}. \quad (16)$$

在表 1 和表 2 中分别列出系数 $\alpha_{p,K}$ 和 $\beta_{p,K}$ 的值, 其与计算值近似精度在 10^{-4} 以内。

表 1 E_c/E_{c0} 的幂多项式系数 $\alpha_{p,K}$

p	1.0	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70
$\alpha_{p,0}$.99975	.99977	.99955	.99942	.99868	.99792	.99684
$\alpha_{p,1}$.01763	.00978	.00423	-.02155	-.01308	-.02189	-.02349
$\alpha_{p,2}$	-.26792	-.23522	-.22140	.02820	-.13973	-.09303	-.11964
$\alpha_{p,3}$.56581	.46825	.42499	-.61574	.17971	.03380	.13566
$\alpha_{p,4}$	-.80583	-.68306	-.62265	1.34402	-.30885	-.11673	-.24996
$\alpha_{p,5}$.29380	.24364	.21867	-1.48249	.08788	.00562	.06878

表 2 E_c/E_{c0} 的幂多项式系数 $\beta_{p,K}$

p	1.0	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70
$\beta_{p,0}$	1.00015	1.00044	1.00085	1.00165	1.00285	1.00440	1.00642
$\beta_{p,1}$	-.01416	-.01443	-.00097	.01115	.02071	.03339	.04452
$\beta_{p,2}$.34931	.43241	.37849	.33419	.31229	.26205	.21433
$\beta_{p,3}$	-.64503	-.93281	-.77484	-.64756	-.59472	-.46461	-.32681
$\beta_{p,4}$	1.05288	1.42063	1.21417	1.04571	.97274	.81356	.62911
$\beta_{p,5}$	-.45481	-.61895	-.53026	-.45788	-.42730	-.36325	-.28318

四、卵形体预示的鞍点有效转动惯量和 裂变阈, 及其与实验值的比较

基于标准液滴模型, 位能面 $E(\epsilon_1, \rho)$ 可表示为

$$E(\epsilon_1, \rho)/E_{c0} = (E_c(\epsilon, \rho)/E_{c0} - 1) + 2x(E_c(\epsilon_1, \rho)/E_{c0} - 1), \quad (17)$$

式中 $x = E_{c0}/2E_{c0}$ 为可裂变参数^[6],

$$x = Z^2/A(50.883(1 - 1.7826I^2)), \quad (18)$$

I 为中子超出比: $I = (N - Z)/A$.

在对称裂变下, 将(15)、(16)式代入(17)式, 给出 $E(\epsilon_1, 1)$ 的函数, 对 ϵ_1 求导后可订出鞍点对应的 ϵ_m 值, 从而得到鞍点依赖于 x 的函数: $\epsilon_m = f(x)$.

在图 3 中显示了在 β 稳定线上对应不同裂变参数 x 值的有效转动惯量, 并和实验值作了比较。从图可见, 对于 Z^2/A 较小时, 卵形体计算值与实验值符合相当好。在 $Z^2/A \sim 36-38$ 时, 计算值有相当快的下降趋势, 而实验值下降平缓。这样使 Z^2/A 小于 37.5 时实验点偏低, 而大于 37.5 时, 实验点又偏高。但总的情况看, 卵形体预示的结果是很好的。

将 ϵ_m 值代入到(17)式中可以得到裂变阈 E_B 与可裂变参数的计算曲线, 它和实验点的比较显示在图 4 中。从图可见, 许多实验点与计算曲线相当接近; 一部分实验点比曲线预示值偏高一些, 可能是由于没有考虑壳效应的修正的结果。

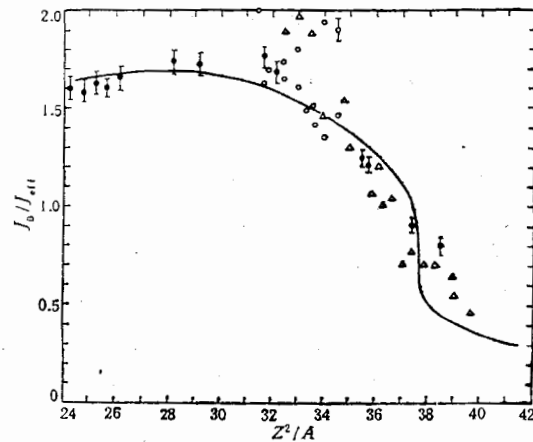


图 3 核的鞍点转动惯量 J_0/J_{eff} 的实验点与卵形体计算曲线的比较;横轴是 Z^2/A 值

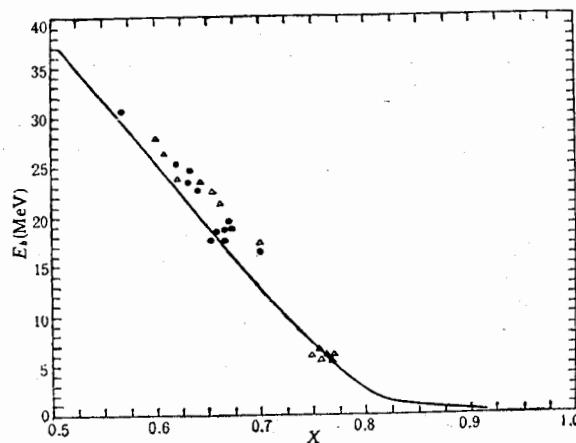


图 4 基于卵形体算出的裂变阈 E_b 与可裂变参数 x 的曲线,以及实验点

对于 ^{238}U 核,可从(17)式计算出位能面 $E(\epsilon_1, p)$ 。这时非对称形变比对称形变 ($p = 1$) 有较高的势能,并随非对称性增加而更加显著,这是预期的。但从 $p = 1$ 到 0.7, 势垒变化仅 1 MeV 左右,是相当小的。因而唯象地加入壳校正和对修正后,将会显著改变位能面的谷的走向,这已为文献[2]的作者所证明。

作为例子,计算了三种裂变阈不同的核: ^{252}Cf (自裂变核), ^{238}U (易裂变核) 和 ^{208}Pb (不易裂变核) 的对称裂变位能曲线。计算结果表明,随着易裂变性增加,鞍点形变内缩,势垒降低,这是完全合理的。

用双参数 (ϵ_1 和 p) 的卡西亚卵形体,可描述对称与非对称裂变;可以从几何上描述从单体连续过渡到出现光滑脖子,最后分成两体(一点接触)这一复杂的形变过程。这种卵形体的真实性检验,在本文中主要用裂变平均总动能来考察断点,用有效转动惯量和

裂变阈来考察鞍点。经过这些检验,可以说,用卡西尼亚卵形回转体来描述裂变是一种较好的近似。

参 考 文 献

- [1] В. С. Ставинский, Н. С. Работнов, А. А. Серегин, *Ядерная физика*, Т. 7(1968), 1051.
- [2] V. V. Pashkevich, *Nucl. Phys.*, A169(1971), 275.
- [3] V. E. Viola, *Nucl. Data Sect.*, A1(1966), 391.
- [4] 戴光曦, 王正大, *高能物理与核物理*, 9(1985), 622.
- [5] J. Toke, R. Bock, G. X. Dai, A. Gobbi et al., *Nucl. Phys.*, A440(1985), 327.
- [6] S. Cohen, F. Plasi, W. J. Swiatecki, *Ann. Phys.*, 82(1974), 557.

THE DESCRIPTION OF FISSION DEFORMATION BY CASSINIAN OVALOID

DAI GUANG-XI LIU XI-MIN LIU GUO-XING

(Institute of Modern Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Large deformation of fission process may be described by Cassinian ovaloid with two variables, symmetry ε and mass asymmetry p . It is a simple and intuitive method. Based on the standard liquid drop model and the ovaloid, One can reproduce some fission data, such as effective moment of inertia, fission threshold energy at saddle point and also TKE at scission point without any adjustable parameters. The paper presents some simple expressions for Coulomb energy and surface energy as function of ε and p , and also analytical expression for moment of inertia.