第11卷 第5期　高能物理与核物理　Vol. 11, No. 5
1987年9月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Sept., 1987

李代数嵌入法实现一例——相互作用玻色子模型

屠传士
(苏州大学)

摘　　要

本文应用李代数嵌入法严格地处理相互作用玻色子模型(IBM-1型). 采用标准 A_1 子代数和嵌入指标的讨论，找出了 IBM-1 模型的所有子代数链. 它证实了 $U(6)$ 模型确实仅存在三个有物理意义的子代数链. 用玻色子的产生，湮灭算符实现嵌入法的元素，适当选择子代数的表示空间的基矢，便可得出由 F. Iachello 等人推出的各子代数生成元. 角动量的考虑是应用嵌入法于物理问题的关键.

一、引　　言

相互作用玻色子模型，在描述中重偶偶核低集体激发态上取得很大成功[1]，相互作用玻色子模型与玻尔-莫特逊的集体模型的比较和相互作用玻色子模型的微观机制的研究工作也很多. 但是，在 IBM 的唯象理论中，采用的较早期李代数方法，虽然便于应用，但未能严格地讨论完整的子代数链以及证明是否已找到全部有物理意义的子代数链. 邓金[2]提出的，五十年代由 B. Gruber 等人发展的最大子代数嵌入法[3,4]，能解决这些问题. 在文献[4]中，给出了 $A_5\approx SU(6)$ 代数的包含不同 $A_1\approx SO(3)$ 类型的子代数链. 在 A_1 的右上角上附加的指标(称嵌入指标)表示了不同的类型. 这里的嵌入指标可由 A_1 代数的表示的特征，即由角动量所确定. 在具体物理问题中，需要有物理意义的子代数链. 用嵌入法来找有物理意义的子代数链的工作是值得研究的课题. 本文以 IBM-1 模型为例，从 $SU(6)$ 对称性出发，确定出包括 A_1^{20} 的一切有物理意义的子代数链，这种有明确嵌入指标的 A_1 代数称为标准 A_1 子代数. 再用最大子代数的嵌入法找出包含标准子代数 A_1 的所有与 IBM-1 模型有关的有物理意义的子代数链. 可以证明，这种方法找出的有物理意义的子代数链与 Arima-Iachello 提出的三条子代数链完全相同.

在李代数中，典型李代数的标记与约当一外尔标记的对应关系:

$$A_n\longleftrightarrow SU(n+1),\quad n=1,2,3,\cdots\cdots.$$
$$B_n\longleftrightarrow SO(2n+1),\quad n=2,3,4,\cdots\cdots.$$

本文1986年4月9日收到.

$$C_n \longleftrightarrow SP(2n), \qquad n = 3,4,5,\cdots\cdots.$$
$$D_n \longleftrightarrow SO(2n), \qquad n = 4,5,6,\cdots\cdots.$$

其中，n 为李代数的阶.

A_n, B_n, C_n 和 D_n 的定义空间的表示维数分别为 $n+1, 2n+1, 2n, 2n$.

下面简单介绍本文与嵌入法有关的结果：详细的论证见文献[3,5].

嵌入指标与定义矩阵(定义矢量)： 在单李代数 G 中，半单子代数 G' 的嵌入指标 j_f 为[3]：

$$j_f = \mu \sum_{\alpha \in r\alpha'} |C_{\alpha'\alpha}|^2,$$

其中

$$\mu = \begin{cases} 2 & \text{对于 } G = C_n, G' \neq C_l, \\ 1/2 & G \neq C_n\ G' = C_l, \\ 1 & \text{其它情形的李代数.} \end{cases}$$

α, α' 分别为代数 G, G' 的根.

$C_{\alpha'\alpha}$ 相当于相位因子，它们由根的嵌入

$$f(\alpha') = \sum_{\alpha \in r\alpha'} |C_{\alpha'\alpha'}|^2 \alpha,$$

定出.

在代数 G 中，子代数 G' 的嵌入指标 j_f 为

$$j_f \delta_{ik} = \vartheta \sum_{j=1}^{n} f_{ij} f_{kj}.$$

在 A_n, B_n, C_n, D_n 代数中，$\vartheta = 1/2$.

f_{ij} 称为在代数 G 中，代数 G_1 的定义矩阵.

在 A_n 代数中，A_1 的定义矢量，嵌入指标[5]分别为：

$$f = (n, n-2, n-4, \cdots\cdots n),$$
$$j_f = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2).$$

在 B_n 代数中，A_1 代数的定义矢量，嵌入指标分别为：

$$f = (2n, 2n-2,\ 2n-4, \cdots\cdots 2),$$
$$j_f = \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1).$$

在 C_n 代数中，A_1 代数的定义矢量，嵌入指标分别为：

$$f = (2n-1, 2n-3, \cdots, 3, 1),$$
$$j_f = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1).$$

r 子代数(又称正规子代数)：在代数 G 中，子代数 G' 的一个根只与代数 G 中的一个根相应，则该子代数称 r 子代数.

S 子代数：在代数 G 中，不存在包含子代数 G' 的正规子代数 $\tilde{G}$，则 G' 称 S 子代数.

最大 S 子代数，如在代数 G 中，不存在包含子代数 G' 的任何子代数，则 G' 称为最大 S 子代数。

在单李代数 G 的约当子代数 K 中，嵌入半单李代数 G' 的约当子代数 K'，则约当算符的嵌入为：

$$f(H_i') = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}H_k,\ (i = 1, 2, \cdots, f).$$

位移算符的嵌入为：

$$f(E'_{\alpha'}) = \sum_{\alpha \in r\alpha'} C_{\alpha'\alpha}E_\alpha.$$

其中，$C_{\alpha\alpha'}$ 的取值可正可负。

根的嵌入，由原来代数的根作用于定义矩阵便可得到嵌入的最大子代数的根（需验证）。

二、用李代数嵌入法找 IBM-1 模型中子代数链

1. 在 A_5 代数中，确定标准 A_1 子代数

在 IBM-1 型中，s-d 玻色子系统具有 $SU(6)$ 对称性。在 A_5 代数中，和角动量 $l = 0, 2$ 有关的 $SO(3)$ 表示的 A_1 代数的定义矢量，嵌入指标分别为

$$f = 2(2, 1, 0, 0, -1, -2),$$

$$j_f = \frac{1}{6} \times 2l \times (2l + 1)(2l + 2) = 20.$$

$\therefore$ 在 IBM-1 型中，标准 A_1 子代数是 A_1^{20}

2. 在 A_5 代数中，确定包括 A_1^{20} 子代数的最大 γ 子代数

在 A_5 代数中，最大 γ 子代数为

$$A_k + A_{4-k}.$$

其中，$k = 0, 1, 2, 3, 4$。

正则子代数 $(A_k + A_{4-k})$ 的嵌入指标

$$j_f(A_5 \supset A_k + A_{4-k}) = 1,$$

则在 $(A_k + A_{4-k})$ 子代数中，A_1 子代数的嵌入指标

$$j_f(A_k + A_{4-k} \supset A_1) = 20.$$

由嵌入指标的定义可标出：$k = 4$。

所以，在 A_5 代数中，包含 A_1^{20} 的最大 γ 子代数只有 A_4'。

因为，B_2 代数的 $(1, 0)$ 表示的维数等于 A_4 代数的定义空间表示的维数，所以，由最大 S 子代数嵌入法可知，在 A_4 代数中，B_2 为它的最大 S 子代数，B_2 的定义矩阵[3]，嵌入指标分别为：

$$f_{A_4 \supset B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$j_f(A_4 \supset B_2) = 2.$$

则，在 B_2 代数中，A_1 子代数的嵌入指标

$$j_f(B_2 \supset A_1) = \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1) = 10.$$

那么，在 A_5 代数中，A_1 子代数的嵌入指标：

$$j_f(A_5 \supset A_1) = j_f(A_5 \supset A_4) \times j_f(A_4 \supset B_2) \times j_f(B_2 \supset A_1) = 20.$$

由此可知，在 B_2 代数中，A_1 一定是最大子代数．所以，在 A_5 代数中，包括 A_1^{20} 的一子代数链为

$$A_5 \supset A_4' \supset B_2^2 \supset A_1^{20}. \tag{1}$$

3. 定出 A_5 代数中，包括 A_1^{20} 子代数的最大 S 子代数链

在 A_5 代数中，最大 S 子代数为 A_2, A_3, C_3[3]

在 C_3 代数中，A_1 子代数的嵌入指标：

$$j_f(C_3 \supset A_1) = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1) > 20.$$

所以，包括 A_1^{20} 子代数的 A_5 代数链中，不存在 C_3 代数．

在 A_2 代数中，A_1 子代数的嵌入指标

$$j_f(A_2 \supset A_1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) = 4.$$

A_2 代数的定义矩阵，嵌入指标[3]分别为

$$f_{A_5 \supset A_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$j_f(A_5 \supset A_2) = 5.$$

所以，在 A_5 代数中，A_1 子代数的嵌入的嵌入指标为

$$j_f(A_5 \supset A_1) = j_f(A_5 \supset A_2) \times j_f(A_2 \supset A_1) = 20.$$

由此可知，在 A_2 代数中，A_1 代数一定是最大子代数．那么，A_5 代数的另一子代数链为：

$$A_5 \supset A_2^5 \supset A_1^{20}. \tag{2}$$

在 A_3 子代数中，A_1 子代数的嵌入指标

$$j_f(A_3 \supset A_1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) = 10.$$

A_3 子代数的嵌入指标由定义矩阵

$$f_{A_5 \supset A_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

决定：$j_f(A_5 \supset A_3) = 2.$

在 A_3 代数中，B_2 代数的$(0,1)$表示的维数与 A_3 的定义空间表示的维数相同，故 B_2

是 A_3 的最大 S 子代数. B_2 代数的定义矩阵,嵌入指标分别为:

$$f_{A_3\supset B_2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix},\ j_f(A_3\supset B_2)=1.$$

在 B_2 代数中, A_1 子代数的嵌入指标

$$j_f(B_2\supset A_1)=\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)=10.$$

所以,在 A_5 代数中, A_1 子代数的嵌入指标

$$j_f(A_5\supset A_1)=j_f(A_5\supset A_3)\times j_f(A_3\supset B_2)\times j_f(B_2\supset A_1)=20.$$

同理可知,在 A_5 代数中,包括 A_1^{20} 的另一子代数链为

$$A_5\supset A_3^2\supset B_2^2\supset A_1^{20}. \tag{3}$$

A_5 代数中,包括 A_1^{20} 的三个子代数链(1),(2),(3)就是 IBM-1 模型中, Arima 和 Jachello 采用的子代数链.

三、IBM-1 模型中,$SU(6)$ 的三个子代数链的生成元

在 IBM-1 模型中, $b^+_{l,m}(l=0,2\ ;m=0,\pm1,\pm2)$, $b_{l,m}$ 表示玻色子产生和湮灭算符,它们满足关系:

$$[b_{l,m},b^+_{l',m'}]=\delta_{l,l'}\delta_{m,m'},$$
$$[b_{l,m},b_{l',m'}]=[b^+_{l,m},b^+_{l',m'}]=0.$$

$b^+_{l,m}, b_{l,m}$ 可构造出 $SU(6)$ 基本表示的荷载空间. 取 $b_{2,2}=d_2$, $b_{2,1}=d_1$, $b_{2,0}=a(\alpha s+\beta d_0)=D_0$,

$$b_{0,0}=c(\gamma s+\delta d_0)=S_0,\ b_{2,-1}=d_{-1},\ b_{2,-2}=d_{-2}. \tag{4}$$

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是常数. $a=1/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $c=1/\sqrt{\gamma^2+\delta^2}$,

若取, $\alpha=0,\beta=1,\gamma=1,\delta=0$,那么

$$b_{2,2}=d_2,\ b_{2,1}=d_1,\ b_{2,0}=d_0,\ b_{0,0}=s,\ b_{2,-1}=d_{-1},\ b_{2,-2}=d_{-2}, \tag{5}$$

(4)和(5)的产生,湮灭算符都能构成 $SU(6)$ 基本表示的荷载空间.

$SU(6)$ 的部份生成元(约当算符和素根相应的位移算符)和 $b^+_{l,m}\ b_{l,m}$ 算符的积之间的对应关系

$$H_1\Longleftrightarrow d_2^+\tilde{d}_{-2},\qquad H_2\Longleftrightarrow -d_1^+\tilde{d}_{-1},\ H_3\Longleftrightarrow D_0^+D_0,$$
$$H_4\Longleftrightarrow S_0^+S_0,\qquad H_5\Longleftrightarrow -d_{-1}^+\tilde{d}_1,\ H_6\Longleftrightarrow d_{-2}^+\tilde{d}_2,$$
$$E_{e_1-e_2}\Longleftrightarrow -d_2^+\tilde{d}_{-1},\ E_{e_2-e_3}\Longleftrightarrow d_{-1}^+\tilde{D}_0,\ E_{e_3-e_4}\Longleftrightarrow D_0^+\tilde{S}_0,$$
$$E_{e_4-e_5}\Longleftrightarrow -S_0^+\tilde{d}_1,\quad E_{e_5-e_6}\Longleftrightarrow d_{-1}^+\tilde{d}_2.$$

这里, e_i 为 6 维笛卡儿坐标单位矢量

$$\tilde{d}_m\equiv(-)^m d_{-m},\quad \tilde{s}=s.$$

1. $SU(6)\supset SU(5)\supset SO(5)\supset SO(3)$ 中,各子代数的生成元

$SU(5)$ 的生成元

(1) $SU(5)$ 代数的根：$\pm\alpha_1,\pm\alpha_2,\pm\alpha_3$，$\pm\alpha_4$，$\pm(\alpha_1+\alpha_2),\pm(\alpha_2+\alpha_3),\pm(\alpha_3+\alpha_4)$，$\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),\pm(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4),\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$，

(2) 在 $SU(6)$ 代数中，$SU(5)$ 代数的根的嵌入：$SU(5)$ 的定义矩阵

$$f_{SU(5)\subset SU(6)}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-1&-1&0&-1&-1\\-1&-1&-1&0&-1&4\\-1&-1&4&0&-1&-1\\-1&4&-1&0&-1&-1\\-1&-1&-1&0&4&-1\end{pmatrix},$$

根的嵌入(仅讨论正根的嵌入，以下讨论同)

$f(\alpha_1')=e_1-e_6$，$f(\alpha_2')=e_6-e_3$，$f(\alpha_3')=e_3-e_2$，$f(\alpha_4')=e_2-e_5$，

$f(\alpha_1'+\alpha_2')=e_1-e_3$，$f(\alpha_2'+\alpha_3')=e_6-e_2$，$f(\alpha_3'+\alpha_4')=e_3-e_5$，

$f(\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3')=e_1-e_2$，$f(\alpha_2'+\alpha_3'+\alpha_4')=e_6-e_5$，

$f(\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'+\alpha_4')=e_1-e_5$.

在本子代数链中，取

$b_{2,2}=d_2$，$b_{2,1}=d_1$，$b_{2,0}=d_0$，$b_{0,0}=s$，

$b_{2,-1}=d_{-1}$，$b_{2,-2}=d_{-2}$.

H_i 和 E_α 的嵌入(仅写出正根相应的位移算符，以下讨论同)，

$f(E'_{\alpha_1'})=d_2^+\tilde{d}_2$，$f(E'_{\alpha_2'})=d_{-2}^+\tilde{d}_0$，

$f(E'_{\alpha_3'})=-d_0^+\tilde{d}_{-1}$，$f(E'_{\alpha_4'})=-d_1^+\tilde{d}_1$

$f(E'_{\alpha_1'+\alpha_2'})=d_2^+\tilde{d}_0$，$f(E'_{\alpha_2'+\alpha_3'})=-d_{-2}^+\tilde{d}_{-1}$，

$f(E'_{\alpha_3'+\alpha_4'})=-d_0^+\tilde{d}_1$，$f(E'_{\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'})=-d_2^+\tilde{d}_{-1}$，

$f(E'_{\alpha_2'+\alpha_3'+\alpha_4'})=-d_{-2}^+\tilde{d}_1$，$f(E'_{\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'+\alpha_4'})=-d_2^+\tilde{d}_1$，

$$f(H_1')=\frac{1}{5}(4d_2^+\tilde{d}_{-2}+d_1^+\tilde{d}_{-1}-d_0^+\tilde{d}_0+d_{-1}^+\tilde{d}_{+1}-d_{-2}^+\tilde{d}_2),$$

$$f(H_2')=\frac{1}{5}(-d_2^+\tilde{d}_{-2}+d_1^+\tilde{d}_{-1}-d_0^+\tilde{d}_0+d_{-1}^+\tilde{d}_1+4d_{-2}^+\tilde{d}_2),$$

$$f(H_3')=\frac{1}{5}(-d_2^+\tilde{d}_{-2}+d_1^+\tilde{d}_{-1}+4d_0^+\tilde{d}_0+d_{-1}\tilde{d}_1-d_{-2}^+\tilde{d}_2),$$

$$f(H_4')=\frac{1}{5}(-d_2^+\tilde{d}_{-2}+4d_1^+\tilde{d}_{-1}-d_0^+\tilde{d}_0+d_{-1}^+\tilde{d}_1+d_{-2}^+\tilde{d}_2),$$

$$f(H_5')=\frac{1}{5}(-d_2^+\tilde{d}_{-2}+d_1^+\tilde{d}_{-1}-d_0^+\tilde{d}_0-4d_{-1}^+\tilde{d}_1-d_{-2}^+\tilde{d}_2).$$

∴ $SU(5)$ 的生成元数目为 24 个：10 个正根相应的位移算符，10 个负根相应的位移算符和 4 个约当算符(以下讨论略)。$SO(5)$ 的生成元

定义矩阵

$$f_{SO(5)\subset SU(5)}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix},$$

$$f_{SO(5)\subset SU(5)\subset SU(6)}=f_{SO(5)\subset SU(5)}\times f_{SU(5)\subset SU(6)}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

$SO(5)$ 的根：$\pm\alpha_1,\pm\alpha_2,\pm(\alpha_1+\alpha_2),\pm(\alpha_1+2\alpha_2)$.

在 $SU(6)$ 中，$SO(5)$ 的正根的嵌入：

$$f(\alpha_1')=(e_1-e_2)+(e_5-e_6),\quad f(\alpha_2')=(e_2-e_3)+(e_3-e_5),$$

$$f(\alpha_1'+\alpha_2')=(e_1-e_3)+(e_3-e_6),\quad f(\alpha_1'+2\alpha_2')=(e_1-e_5)+(e_2-e_6),$$

在 $SU(6)$ 中，$SO(5)$ 的 E_α,H_i 的嵌入：

$$f(E'_{\alpha_1'})=-d_2^+\tilde{d}_{-1}+d_{-1}^+\tilde{d}_2,\quad f(E'_{\alpha_2'})=d_1^+\tilde{d}_0-d_0^+\tilde{d}_1,$$

$$f(E'_{\alpha_1'+\alpha_2'})=d_2^+\tilde{d}_0-d_0^+\tilde{d}_2,\quad f(E'_{\alpha'+2\alpha_2'})=-d_2^+\tilde{d}_1+d_1^+\tilde{d}_2,$$

$$f(H_1')=d_2^+\tilde{d}_{-2}-d_{-2}^+\tilde{d}_2,\quad f(H_2')=-d_1^+\tilde{d}_{-1}+d_{-1}^+\tilde{d}_1.$$

∴ $SO(5)$ 的生成元数目为 10 个.

$SO(3)$ 的生成元

定义矩阵

$$f_{SO(3)\subset SO(5)}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix},$$

$$f_{SO(3)\subset SO(5)\subset SU(5)\subset SU(6)}=f_{SO(3)\subset SO(5)}\times f_{SO(5)\subset SU(5)}\times f_{SU(5)\subset SU(6)}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$SO(3)$ 的根：$\pm\alpha$.

在 $SU(6)$ 中，$SO(3)$ 的正根的嵌入

$$f(\alpha')=4(e_1-e_2)+4(e_5-e_6)+6(e_2-e_3)+6(e_3-e_5).$$

在 $SU(6)$ 中，$SO(3)$ 的 E_α,H_i 的嵌入

$$f(E'_{\alpha'})=\sqrt{2}\,[-\sqrt{2}\,d_2^+\tilde{d}_{-1}+\sqrt{2}\,d_{-1}^+\tilde{d}_2+\sqrt{3}\,d_1^+\tilde{d}_0-\sqrt{3}\,d_0^+\tilde{d}_1],$$

$$f(H')=2d_2^+\tilde{d}_{-2}-d_1^+\tilde{d}_{-1}+d_{-1}^+\tilde{d}_1-2d_{-2}^+\tilde{d}_2.$$

∴ $SO(3)$ 的生成元为 3 个.

2. $SU(6)\supset SO(6)\supset SO(5)\supset SO(3)$ 中，各子代数的生成元

在此代数链中，取

$$b_{2,2}=d_2,\quad b_{2,1}=d_1,\quad b_{2,0}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-s+d_0),$$

$$b_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{2}}(s+d_0),\quad b_{2,-1}=d_{-1},\quad b_{2,-2}=d_{-2}.$$

$SO(6)$ 的生成元(仅写出正根相应的位移算符，以下讨论同)：

$$f(E'_{\alpha_1'})=\frac{1}{\sqrt{2}}(d_1^+\tilde{s}+d_1^+\tilde{d}_0+s^+\tilde{d}_1-d_0^+\tilde{d}_1),$$

$$f(E'_{\alpha_2'})=-d_2'\tilde{d}_{-1}+d_{-1}^+\tilde{d}_2,$$

$$f(E'_{\alpha_3'})=\frac{1}{\sqrt{2}}(-d_1^+\tilde{s}+d_1^+\tilde{d}_0-s^+\tilde{d}_1-d_0^+\tilde{d}_1),$$

$$f(E'_{\alpha'_1+\alpha'_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(d_2^+\tilde{s} + d_2^+\tilde{d}_0 + s^+\tilde{d}_2 - d_0^+\tilde{d}_2),$$

$$f(E'_{\alpha'_2+\alpha'_3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-d_2^+\tilde{s} + d_2^+\tilde{d}_0 - s^+\tilde{d}_2 - d_0^+\tilde{d}_2),$$

$$f(E'_{\alpha'_1+\alpha'_2+\alpha'_3}) = -d_2^+\tilde{d}_1 + d_1^+\tilde{d}_2,$$

$$f(H'_1) = \frac{1}{2}(d_2^+\tilde{d}_{-2} - d_1^+\tilde{d}_{-1} - d_0^+\tilde{s} - s^+\tilde{d}_0 + d_{-1}^+\tilde{d}_1 - d_{-2}^+\tilde{d}_2),$$

$$f(H'_2) = \frac{1}{2}(d_2^+\tilde{d}_{-2} + d_1^+\tilde{d}_{-1} + d_0^+s + s^+\tilde{d}_0 - d_{-1}^+\tilde{d}_1 - d_{-2}^+\tilde{d}_2),$$

$$f(H'_3) = \frac{1}{2}(-d_2^+\tilde{d}_{-2} - d_1^+\tilde{d}_{-1} + d_0^+s + s^+\tilde{d}_0 + d_{-1}^+\tilde{d}_{+1} - d_{-2}^+\tilde{d}_2),$$

$$f(H'_4) = \frac{1}{2}(-d_2^+\tilde{d}_{-2} + d_1^+\tilde{d}_{-1} - d_0^+\tilde{s} - s^+\tilde{d}_0 - d_{-1}\tilde{d}_{+1} + d_{-2}^+\tilde{d}_2).$$

∴　$SO(6)$ 的生成元数目为 15 个。

$SO(5)$ 的生成元

$$f(E'_{\alpha'_1}) = -d_2^+\tilde{d}_{-1} + d_{-1}^+\tilde{d}_2,\quad f(E'_{\alpha'_2}) = d_1^+\tilde{d}_0 - d_0^+\tilde{d}_1,$$

$$f(E'_{\alpha'_1+\alpha'_2}) = d_2^+\tilde{d}_0 - d_0^+\tilde{d}_2,\quad f(E'_{\alpha'_1+2\alpha'_2}) = -d_2^+\tilde{d}_1 + d_1^+\tilde{d}_2,$$

$$f(H'_1) = d_2^+\tilde{d}_{-2} - d_{-2}^+\tilde{d}_2,\qquad f(H'_2) = -d_1^+\tilde{d}_{-1} + d_{-1}^+\tilde{d}_1.$$

∴　$SO(5)$ 的生成元数目为 10 个。

$SO(3)$ 的生成元

$$f(E'_{\alpha'_1}) = 2(-d_2^+\tilde{d}_{-1} + d_{-1}^+\tilde{d}_2) + \sqrt{6}(d_1^+\tilde{d}_0 - d_0^+\tilde{d}_1),$$

$$f(H'_1) = 2d_2^+\tilde{d}_{-2} - d_1^+\tilde{d}_{-1} + d_{-1}^+\tilde{d}_1 - 2d_{-2}^+\tilde{d}_2.$$

∴　$SO(3)$ 的生成元数目为 3 个。

3. $SU(6)\supset SU(3)\supset SO(3)$ 中，各子代数的生成元，在本子代数链中，取

$$b_{2,2} = d_2,\quad b_{2,1} = d_1,\quad b_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(s + \sqrt{2}\,d_0),$$

$$b_{0,0} = \frac{1}{3}(-\sqrt{2}\,s + d_0),\quad b_{2,-1} = d_{-1},\quad b_{2,-2} = d_{-2}.$$

$SU(3)$ 的生成元(仅写出正根相应的位移算符，以下讨论同)。

$$f(E'_{\alpha'_1}) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(d_1^+\tilde{s} + s^+\tilde{d}_1) + \frac{1}{\sqrt{3}}d_1^+\tilde{d}_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}d_0^+\tilde{d}_1 + \sqrt{2}\,d_{-1}^+\tilde{d}_2,$$

$$f(E'_{\alpha'_2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(d_1^+\tilde{s} + s^+\tilde{d}_1) + \frac{2}{\sqrt{3}}d_1^+\tilde{d}_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}d_0^+\tilde{d}_1 - \sqrt{2}\,d_2^+\tilde{d}_{-1},$$

$$f(E'_{\alpha'_1+\alpha'_2}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}(d_2^+\tilde{s} + s^+\tilde{d}_2) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}d_2^+\tilde{d}_0 - d_1^+\tilde{d}_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}d_0^+\tilde{d}_2,$$

$$f(H_1')=\frac{1}{3}(2d_2^+\tilde{d}_{-2}-2d_1^+\tilde{d}_{-1}+d_0^+\tilde{d}_0+\sqrt{2}(s^+\tilde{d}_0+d_0^+\tilde{s})$$
$$+d_{-1}^+\tilde{d}_1-4d_{-2}^+\tilde{d}_2),$$
$$f(H_2')=\frac{1}{3}(2d_2^+\tilde{d}_{-2}+d_1^+\tilde{d}_{-1}-2d_0^+\tilde{d}_0-2\sqrt{2}(s^+\tilde{d}_0+d_0^+\tilde{s})$$
$$+d_{-1}^+\tilde{d}_1+2d_{-2}^+\tilde{d}_2),$$
$$f(H_3')=\frac{1}{3}(-4d_2^+\tilde{d}_{-2}+d_1^+\tilde{d}_{-1}+d_0^+\tilde{d}_0+\sqrt{2}(s^+\tilde{d}_0+d_0^+\tilde{s})$$
$$-2d_{-1}^+\tilde{d}_1+2d_{-2}^+\tilde{d}_2).$$

∴　$SU(3)$ 的生成元数目为 8 个.

$SO(3)$ 的生成元

$$f(E'_{\alpha_1})=\sqrt{6}(d_1^+\tilde{d}_0-d_0^+\tilde{d}_1)+2(d_{-1}^+\tilde{d}_2-d_2^+\tilde{d}_{-1}),$$
$$f(H_1')=2d_2^+\tilde{d}_{-2}-d_1^+\tilde{d}_{-1}+d_{-1}^+\tilde{d}_1-2d_{-2}^+\tilde{d}_2.$$

∴　$SO(3)$ 的生成元数目为 3 个.

4. 用嵌入法实现的李代数生成元与 F. Iachello[1] 生成元的比较

在 IBM-1 模型中，F. Iachello 采用了拉卡基得出的 $SU(6)$ 的三个子代数链的所有生成元，用嵌入法(适当选择基矢)得出的生成元，经线性组合后，可得出与 F. Iachello 相同形式的生成元. 这就是说两者只差一个相似变换.

四、结　论

用嵌入法找 IBM-1 模型中的子代数链的关键是确定出与角动量有关的标准 A_1 子代数. 由嵌入指标的讨论可得出全部有物理意义的完整的子代数链. 这样，可排除与物理无关的子代数链. 此方法可用在分子、原子，其他核模型中找有物理意义的完整的代数链.

凡是由 s 玻色子参与构成的 A_n 代数中，在某一子代数链中，一定有 γ 子代数的嵌入，而在无 γ 子代数的嵌入的子代数链中，所有 S 子代数的定义矩阵之积会显出角动量 $l=0$ 的 s 玻色子的存在.

在 IBM-1 模型中，确定各子代数的生成元时，对三个子代数链选取了不同形式的 $b_{lm}^+, b_{l,m}$，在 $SU(5)$ 代数中，$n_d=\sum\limits_{\alpha} d_{2\alpha}^+ d_{2\alpha}$ 是好的量子数，这意味着从 $U(6)\supset U(5)$ 这个步骤中，s 和 d 玻色子是分开的，此时，S_0 和 d_0 不需要重新组合. 在 $SU(3)$ 代数的根系中，采用拉卡基，$H_1=L_0, H_2=Q_0$ 是同时对角化的，此时，$d_{\pm 2}, d_{\pm 1}$ 显然分别是 L_0, Q_0 的共同本征态. 但 S_0, d_0 不是 Q_0 的共同本征态. 容易证明 $\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}s+d_0)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(s+\sqrt{2}d_0)$ 是 L_0, Q_0 的共同本征态. 所以，必须选取二个有 s 和 d_0 适当线性组合的形式. 对

于 $SO(6)$ 代数链的讨论类似。

作者对周孝谦教授的指导和凌寅生教授、余行、董慎行老师的有益讨论表示感谢。

参　考　文　献

[1] Arima and Iachello, *Phys. Rev. Lett.,* **35**(1975), 1069; *Ann. Phys.,* **99**(1976), 253; **111** (1978), 201.
[2] E. B. Dynkin, *Math. Sb.,* **30**(1952), 349; *Amer. Math. Soc. Transl.,* [2], **6**(1967), 111.
[3] B. Gruber and M. T. Samuel, in Group Theory and its Applications, Vol. III, EM Loebl (Ed.) (Academic Press, NEW York, 1975).
[4] M. Lorente and B. Gruber, *J. Math. Phys.,* **13**(1972), 1639.
[5] B. Gruber and M. T. Samuel, *Kinam,* **2**(1980), 133.

REALIZATION OF THE EMBEDDING OF LIESUBAL GeBRA IN THE CASE OF INTERACTING BOSON MODEL

TU CHUAN-SHI
(*Suzhou University*)

ABSTRACT

This article treats the interacting Boson model (IBM-1) by the embedding theory of Lie subagbra. From the considerations of stantard A_1 subagbra and the index relation of the embedding theory, we can get all the subagbra chains of IBM-1 model and prove that they exhaust the possible physically meaningful chains.

The Boson creation and annihilation operators are taken as basis for the realization of the embedding. In selecting the basis, angular momentum consideration is very crucial for the outcome of the correct physical result which has angular momentum as a good quantum number. Our results coincides with the original result of Arima and Iachello.