

格点 $U(1)$ -Higgs 系统的解析研究*

王杰 谭祖国 郑希特
(成都科技大学)

摘 要

运用变分累积展开方法研究变模荷为1的 Higgs- $U(1)$ 耦合系统,给出了近似解析确定相变线的方法,得出 $d=4$ 的相图与 Monte Carlo 定性符合,也给出了 $d=5$ 的相图.

一、引 言

在格点规范理论中,研究纯规范场与 Higgs 场的耦合系统有很大的兴趣,这是由于 Higgs 机制的重要性. 对这种系统的深入了解还有助于宇宙学的研究,并可能对规范场与费米场耦合系统研究的方法带来一些启示.

对 $U(1)$ -Higgs 耦合系统的早期解析研究^[1]都是定模 Higgs 场的情形. Fradkin 和 Shenker^[1] 证明了当 Higgs 场是按规范群的基础表示变换时禁闭相与 Higgs 相之间是连通的. 这被随后的 MC 模拟所证实. 但是,当 Higgs 场的模不固定时,情况就不同了. Munehisa^[2,3] 和 Koufsouinbas^[4] 的 MC 研究表明在 Higgs 场自耦合常数 λ 小时禁闭相与 Higgs 相将不再是连通的. 在弱耦合区, Higgs 相与库仑相也是被相变线所分开,但是在相变是几级的这一点上却有分歧. [2] ([4]) 认为是一级(二级). 随后 Munehisa^[3] 指出这个分歧只是表面的,因为各自对模型用了不同的参数. Toussaint 和 Sugar^[5] 则用 MC 模拟得到是一级相变的结果. 为了使对 MC 结果有更清楚的物理了解,以及对变换 Higgs 场情形几乎没有什么解析研究,所以进行解析研究就是很必要的了,即使结果还有点粗糙.

在格点上传统解析计算相图的方法是选取一定的序参量进行计算,由序参量的不连续性来判定相变点从而得到相变线及相图. 这里我们在变分-累积展开方法^[6]的基础上提出一种不必仔细计算序参量而直接导出相变线方程的办法.

二、方 法

对 $U(1)$ -Higgs 系统,我们采用如下作用量^[2]

* 国家自然科学基金资助课题.
本文 1987 年 3 月 9 日收到.

$$S = -\frac{\beta}{2} \sum_p (\text{tr} U_p + \text{tr} U_p^\dagger) + \sum_i [\lambda(\phi_i \phi_i^\dagger)^2 + m^2 \phi_i \phi_i^\dagger] \\ + \sum_{i,\mu} [2\phi_i \phi_{i+\mu}^\dagger - (\phi_i U_i \phi_{i+\mu}^\dagger + \text{h.c.})], \quad (1)$$

这里 ϕ_i 是定义在格点 i 上的 Higgs 场, U_p 是沿元格四个链上 $U(1)$ 群元素 U_l 的顺次乘积, ϕ_i 和 U_l 都在基础表示中写出, 求和 \sum_p , \sum_i , $\sum_{i,\mu}$ 分别对元格, 格点和链进行. 令 $U_{i,\mu} \equiv U_l = e^{i\theta_l}$ 则 $U_p = e^{i\theta_p}$, $\theta_p = \theta_i + \theta_j - \theta_k - \theta_l$, i, j, k, l 表示构成一个元格的四边, 并且令 $\phi_i = \rho_i V_i$, $V_i = e^{i\varphi_i}$, $0 \leq \rho_i \leq \infty$, 相应的积分尺度 $[d\phi^\dagger d\phi] \rightarrow [\rho d\rho dV]$. 完成规范变换 $U_{i,\mu} \rightarrow V_i^\dagger U_{i,\mu} V_{i+\mu}$ 后,

$$S = -\beta \sum_p \cos \theta_p + \sum_i (\lambda \rho_i^4 + m^2 \rho_i^2) + \sum_{i,\mu} [2\rho_i^2 - 2\rho_i \rho_{i+\mu} \cos \theta_l], \quad (2)$$

为了处理上的简化, 我们采用近似 $\rho_i = \rho_{i+\mu} = \rho$, 于是

$$S = -\beta \sum_p \cos \theta_p + M(\lambda \rho^4 + m^2 \rho^2) + \sum_l (2\rho^2 - 2\rho^2 \cos \theta_l), \quad (3)$$

这里 M 是格点总数. \sum_l 表示对链求和. 系统的配分函数可写成

$$Z \equiv e^{-W_1 M} = \int [\rho d\rho] e^{-M(\lambda \rho^4 + m^2 \rho^2) - 2M d\rho} \cdot \left[\frac{d\theta}{2\pi} \right] e^{\beta \sum_p \cos \theta_p} \cdot e^{2\rho^2 \sum_l \cos \theta_l}, \quad (4)$$

d 是系统的维数. 在(4)式中对 $U(1)$ 的群积分可以利用变分-累积展开的技术处理, 如果令 $J = 2\rho^2$ 则 $2\rho^2 \sum_l \cos \theta_l = J \sum_l \cos \theta_l$ 正好相当于在作纯规范场的变分处理^[6]中的试探作用量 S_0 , 由于

$$Z_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{d\theta}{2\pi} \right] e^{J \sum_l \cos \theta_l} = [I_0(J)]^{M d}, \quad (5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{d\theta}{2\pi} \right] e^{\beta \sum_p \cos \theta_p} \cdot e^{J \sum_l \cos \theta_l} \equiv Z_0 \left\langle e^{\beta \sum_p \cos \theta_p} \right\rangle_0 \quad (6)$$

$$= Z_0 e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} K_n(\beta, J)}, \quad (7)$$

这里等式(7)正是所谓累积展开. 它的计算在附录中给出. 现在我们有

$$Z \equiv e^{-WM} = \int [dJ] e^{-2M \ln 2 - M(\frac{1}{4} \lambda J^2 + \frac{1}{2} m^2 J) - MJ d + M \cdot F(\beta, J)}, \quad (8)$$

这里

$$MF(\beta, J) = M d \ln I_0(J) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} K_n(\beta, J), \quad (9)$$

(8)式的积分用鞍点法处理, 于是单位格点平均自由能为

$$W = 2 \ln 2 + \frac{1}{4} \lambda J^2 + \frac{1}{2} m^2 J + J d - F(\beta, J), \quad (10)$$

而其中的 J 由鞍点方程

$$\frac{\lambda}{2} J + \frac{1}{2} m^2 + d - \frac{\partial}{\partial J} F(\beta, J) = 0 \quad (11)$$

定

由性

显出:

于是

因之两

时, 它表

m²

定出.

通常计算相图的办法是直接计算序参数

$$\langle |\phi|^2 \rangle = - \frac{\partial W}{\partial m^2}, \quad (12)$$

由其结果的不连续性找到相变点. 现在我们不计算 $\langle |\phi|^2 \rangle$, 而是试图直接找到其奇异性发生的地方. 以(10)式代入(12)式得

$$\langle |\phi|^2 \rangle = - \frac{1}{2} J - \left[\frac{\lambda}{2} J + \frac{1}{2} m^2 + d - \frac{\partial F(\beta, J)}{\partial J} \right] \frac{\partial J}{\partial m^2}, \quad (13)$$

显然它的奇异性只可能发生在 $\frac{\partial J}{\partial m^2}$ 发散的地方. J 对 m^2 的依赖关系可对(11)式求导得出:

$$\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2} \lambda - \frac{\partial^2 F(\beta, J)}{\partial J^2} \right] \frac{\partial J}{\partial m^2} = 0, \quad (14)$$

于是 $\frac{\partial J}{\partial m^2}$ 发散的条件是(14)式中 $\frac{\partial J}{\partial m^2}$ 的系数为零:

$$\frac{1}{2} \lambda - \frac{\partial^2 F(\beta, J)}{\partial J^2} = 0, \quad (15)$$

因之, 相变线方程由(15)式与(11)式联立决定. 当知道了 $F(\beta, J)$ 后(见附录), 对 J 的两次求导没什么困难. 本文中我们计算 $F(\beta, J)$ 到累积展开的四级.

三、结果与讨论

四维时对 $\lambda = 0.8$ 的相变结构示于图 1. 虚线是 MC 的结果^[2]. 当 β 从 0 变到 0.55 时, 仅有一支解. $\beta > 0.55$ 时出现三支解, 其中自由能最低的一支如图 1 中的实线所示, 它表明在弱耦合区存在着一级相变. 第二支自由能较高的解在 β 逐渐变大时 m^2 很快趋

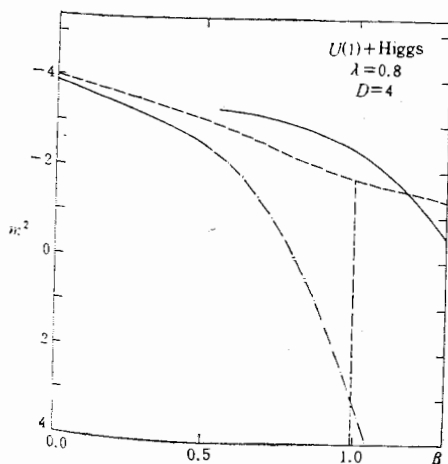


图 1

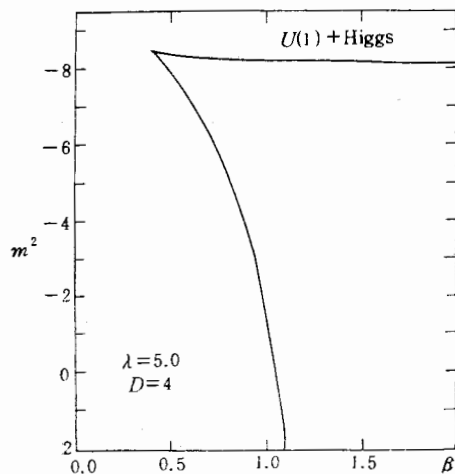


图 2

于无穷,是非物理的。第三支自由能较高的解如图 1 中的点画线所示,它把强耦合区与弱耦合区分开。从物理上看,这一支自由能级高的解对应着系统的一支不稳定解,这种不稳定性反映了发生高级相变的可能,这与 MC 发现的禁闭相与库仑相之间存在着二级相变的结果一致。图 1 中 Higgs 相与库仑相在 0.5 附近没有分开是由于计算的近似造成的,可以期待更高级的累积修正会提供更好的结果。当然 $\rho_x = \rho_{x+\mu} = \rho$ 的近似也会带来一定的误差。我们的计算表明当 $0 \leq \lambda \leq 3.985$ 时 Higgs 相与禁闭相是由一级相变线分开的,而当 $\lambda > 3.985$ 时,两个相则解析连通。

图 2 给出 $\lambda = 5.0$ 时的结果,它已近似于定模 ($\lambda \rightarrow \infty$) 的情形,与 E. Fradkin 和 S. H. Shenker^[1] 在理论上的预言相符。

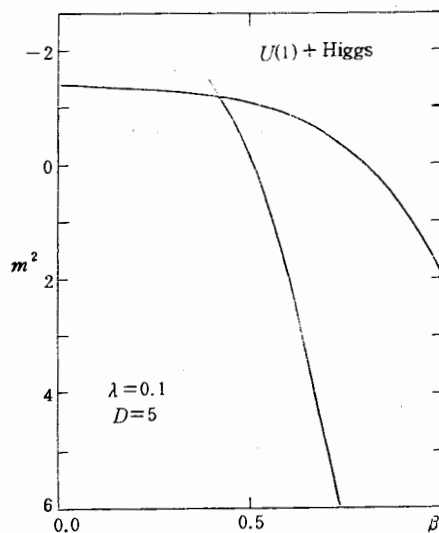


图 3

在五维时,当 $0 \leq \lambda \leq 4.981$ 时 Higgs 相与禁闭相为一级相变线所分开,而 $\lambda > 4.981$ 时,两个相是解析连通的。图 3 给出了 $\lambda = 0.1$ 的情形,目前尚无五维时的 MC 结果。

附录 $K_n(\beta, J)$ 的计算

在计算 $K_n(\beta, J)$ 时用图形表示很方便,例如








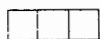






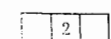
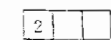


$$K_1(\beta, J) = \beta \left\langle \sum_p \cos \theta_p \right\rangle_0 \equiv \beta \left\langle \sum_p \square \right\rangle_0,$$

$$K_2(\beta, J) = \beta^2 \left\langle \left(\sum_p \cos \theta_p \right)^2 \right\rangle_0 - \beta^2 \left\langle \sum_p \cos \theta_p \right\rangle_0^2$$

$$\equiv \beta^2 \left\langle \left(\sum_p \square \right)^2 \right\rangle_0 - \beta^2 \left\langle \sum_p \square \right\rangle_0^2 \equiv \beta^2 \left\langle \left(\sum_p \square \right)^2 \right\rangle_c,$$

在 $K_n(\beta, J)$ 中只有联结图形才有贡献,因而在计算多级 K_n 时,要画出所有可能的联结图形和点清各种图形出现的次数,这和 $SU(2)$ 的点数完全一样^[6],然后计算多图形在 S_0 中的平均。对 $U(1)$ 说,这



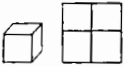


表 1

n	i	$D_{n,i}$	$\alpha_{n,i}/N_p$	$\langle D_{n,i} \rangle_0$
1	1		1	u_1^4
2	1		1	$\frac{1}{2}(1 + u_2^2)$
	2		R	$\frac{1}{2} u_1^4(1 + u_2)$
3	1		1	$\frac{1}{4}(3u_1^4 + u_3^4)$
	2		$3R$	$\frac{1}{2} u_1^3 \left[u_1 + \frac{1}{2}(u_1 + u_3)u_2^2 \right]$
	3		RR_1	$\frac{1}{4} u_1^2(3u_1 + u_3)$
	4		$8R_1$	$\frac{1}{4} u_1^4(1 + 3u_2^2)$
	5		$3(3RR_0 - 8R_1)$	$\frac{1}{4} u_1^3(1 + u_2)^2$
4	1		1	$\frac{1}{8}(3 + 4u_2^4 + u_4^4)$
	2		$4R$	$\frac{1}{8} u_1^3 [3u_1^2(1 + u_2) + u_3^2(u_2 + u_4)]$
	3		$3R$	$\frac{1}{4} \left(1 + 2u_2^4 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{1}{2} u_2^2 u_4 \right)$
	4		$6RR_1$	$\frac{1}{4} u_1^4 \left(1 + u_2 + \frac{1}{2} u_2^3 + u_2^4 + \frac{1}{2} u_2^2 u_4 \right)$
	5		$RR_1 R_2$	$\frac{1}{8} u_1^2(3 + 4u_2 + u_4)$
	6		$48R_1$	$\frac{1}{4} u_1^4 \left[(1 + u_2) u_1^2 + \frac{1}{2} u_2^2(u_1^2 + u_3^2) + u_1 u_2^2 u_3 \right]$
	7		$6(3RR_0 - 8R_1)$	$\frac{1}{4} u_1^4 \left[2u_1^2 + \frac{1}{2} u_2^2(u_1 + u_3)^2 \right]$
	8		$12(3RR_0 - 8R_1)$	$\frac{1}{4} u_1^3(1 + u_2) \left[u_1 + \frac{1}{2}(u_1 + u_3)u_2^2 \right]$
	9		$96R_1^2$	$\frac{1}{4} u_1^3(u_1 + u_2 u_3 + u_1 u_2 + u_1 u_2^2)$
10		$48R_1(R_0^2 + 4R_1 + 2R_2^2)$	$\frac{1}{8} u_1^3(3u_1 + u_3 + u_2 u_3 + 3u_1 u_2)$	

31

普各, 这

续表 1

n	i	$D_{n,i}$	$\alpha_{n,i}/N_p$	$\langle D_{n,i} \rangle_0$
11			$48R_1$	$\frac{1}{8} u_1^4(1 + 2u_2^2 + 4u_3^2 + u_4^2)$
12			$192R_1^2$	$\frac{1}{8} u_1^4(1 + u_2 + 3u_2^2 + 3u_2^3)$
13			$12(2R_0 + R_1 + 2R_1R_2)$	$\frac{1}{8} u_1^4(1 + 6u_2^2 + u_4^2)$
14			$96(R_0^2 - 2R_1^2 - R_1)$	$\frac{1}{8} u_1^4(1 + 3u_2 + 3u_2^2 + u_3^2)$
15			$48(9R_0^3 - 14R_0^2 + 19R_0 - 7)$	$\frac{1}{8} u_1^4(1 + 3u_2 + 3u_2^2 + u_3^2)$

些平均的计算比 $SU(2)$ 要容易得多. 例如,

$$\begin{aligned}
 \langle \square \rangle_0 &= \langle \cos^4 \theta_p \rangle_0 \\
 &= \frac{1}{z_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{d\theta}{2\pi} \right] \cos^4(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4) e^{J \sum_1^J \cos \theta_i} \\
 &= \frac{1}{z_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{d\theta}{2\pi} \right] \left\{ \frac{1}{8} \cos 4\theta_p + \frac{1}{2} \cos 2\theta_p + \frac{3}{8} \right\} e^{J \sum_1^J \cos \theta_i} \\
 &= \frac{1}{8} \langle 3 + 4\cos 2\theta_p + \cos 4\theta_p \rangle_0 \\
 &= \frac{1}{8} (3 + 4u_2^2 + u_4^2),
 \end{aligned}$$

这里, $u_n = \frac{I_n(J)}{I_0(J)}$. 令

$$K_n(\beta, J) = \left\langle \left(\sum_p \square \right)^n \right\rangle_c = N_p \beta^n \sum_i \alpha_{n,i} \langle D_{n,i} \rangle_c,$$

$\alpha_{n,i}$, $D_{n,i}$ 到 $n=4$ 列于表 1 中. 其中还用了如下符号: $R = 4R_0$, $R_0 = 2d - 3$, $R_1 = 2d - 4$, $R_2 = 2d - 5$, $N_p = \frac{1}{2} Md(d-1)$.

参 考 文 献

- [1] E. Fradkin and S. H. Shenker, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 3682; T. Banks and E. Rabinovici, *Nucl. Phys.*, **B160**(1979), 349; Horn and S. Yankielowicz, *Phys. Lett.*, **85B**(1979), 347; Horn and E. Katznelson, *Phys. Lett.*, **91B**(1980), 397.
- [2] Y. Munehisa, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 1310; K. Jausen, J. Jersak, C. B. Lang, T. Neufhaus and G. Vones, *Phys. Lett.*, **155B**(1985), 268.
- [3] Y. Munehisa, *Phys. Rev.*, **D31**(1985), 1522.
- [4] G. Koutsoumbas, *Phys. Lett.*, **140B**(1984), 379.
- [5] W. D. Toussaint and R. L. Sugar, *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 2061.
- [6] X. T. Zheng, C-I Tan and T. L. Chen, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2468; X. T. Zheng, J. Wang and Z. G. Tan, *Mod. Phys. Lett.*, **A2**(1987), 199; X. T. Zheng, Z. G. Tan and J. Wang, *Nucl. Phys.*, **B287**(1987), 171.

is st
first-
with

ANALYTICAL STUDY OF $U(1)$ -HIGGS SYSTEM ON A LATTICE

WANG JIE TAN ZUGUO ZHENG XITE

(Chengdu University of Science & Technology)

ABSTRACT

The fundamental $U(1)$ -lattice-gauge-Higgs system with radial degrees of freedom in $d=4$ is studied by using variational-cumulant expansion method. Equations for determining the first-order phase transitions of the model is given. Our result is qualitatively in agreement with MC result. The result for $d=5$ is also given.