

关于 Skyrme 模型中一种 $B=2$ 位形的研究

高孝纯 汪涌
(浙江大学,杭州)

摘 要

本文对 Skyrme 模型中一种 $B=2$ 位形进行了研究,并将它量子化.发现所得能谱有很奇特的性质.但仍与实验结果相符.进一步的研究表明, $B=1, 3, 5, \dots$ 等不能有类似的位形,而 $B=0, 4, \dots$ 等可有类似的位形,从而量子化后所得能谱也会有上述奇特性质.值得注意的是,其中 $B=0$ 的位形就是有许多人研究过的“Hopf 位形”.

一、引 言

我们知道,在大 N 极限下, QCD 等价于有效的弱耦合介子场论,并且如果把 $1/N$ 看作耦合常数,那么重子质量 $\sim 1/\text{耦合常数}$. 这暗示着重子可能是孤子^[1]. 但是大 N 极限并不能提供很确定的有效理论,所以作为第一步,人们先考虑仅有 π 介子的理论. 于是, Skyrme 模型^[2]重新引起了人们的兴趣. 一系列的研究使 Skyrme 模型有了更加巩固的理论基础^[3-6]. 例如,此模型中的孤子即为重子这一点不仅为大 N 极限的研究所暗示,而且为进一步的理论研究所肯定. 于是,人们对多种孤子位形进行了研究^[7-10],并把理论结果和实验进行了比较. 一般来说,理论结果与实验数值的偏差均在 30%~40% 以内.

本文将着重研究此模型中的重子数 $B=2$ 的一种位形,将它量子化,并求出其能谱. 我们发现,该能谱具有很奇特的性质,但结果仍与实验相符. 我们分析了能谱呈现这种性质的原因. 另外,我们还说明了重子数 $B=1, 3, \dots$ 情形不可能有类似的位形,而 $B=0, 4, \dots$ 情形可有类似的位形,于是量子化后相应能谱必然也会有上述奇特性质. 值得注意的是,其中 $B=0$ 的位形就是有名的“Hopf 位形”^[11-13].

最近,人们对 $B=2$ 的各种位形作了不少研究^[15-20]. 本文将在分析与讨论一节中,结合我们的研究对其他有关工作作一讨论.

二、孤子位形、静态能量和运动方程

二味情形下 Skyrme 模型的拉氏量为:

本文 1987 年 3 月 20 日收到.

$$\mathcal{L}(x) = \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}(\partial_\mu U(x) \partial_\mu U^+(x)) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[U(x) \partial_\mu U^+(x), U(x) \partial_\nu U^+(x)]^2 \quad (2.1)$$

其中,场位形 $U(x) \in SU(2)$; F_π 为 π 介子衰变常数,具有质量量纲; e 为无量纲常数.

二味时, $W-Z-W$ 项消失^[4],故在 $\mathcal{L}(x)$ 中不出现.

对于(2.1)式的静态孤子解,我们可以用一分类数来对其进行分类,这就是重子数^[4,14]:

$$B(U) = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon_{ijk} \text{Tr} [U^+ \partial_i U U^+ \partial_j U U^+ \partial_k U] = \int d^3x B_0 \quad (2.2)$$

本文所要研究的位形是:

$$U_0(x) = \left(\cos \frac{F(r)}{2} + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{x}} \sin \frac{F(r)}{2} \right) (a_0 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{a}) \left(\cos \frac{F(r)}{2} + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{x}} \sin \frac{F(r)}{2} \right) \quad (2.3)$$

国内黄涛等人^[13]曾研究过该位形的一些静态性质,我们现在要进一步研究它的量子化问题.

在(2.3)式中, $\boldsymbol{\tau}$ 为 $SU(2)$ 生成元, $\hat{\mathbf{x}}$ 为 \mathbf{x} 方向单位矢量; $a_0 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{a}$ 为 $SU(2)$ 常值矩阵, $a_0^2 + a^2 = 1$.

另外,有限能量条件要求 $F(r)$ 满足边界条件:

$$\begin{cases} F(r) = z\pi, & r \rightarrow 0 \\ F(r) \rightarrow 0, & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.4)$$

位形 $U_0(x)$ 的重子数为:

$$B = z \quad (2.5)$$

将 $U_0(x)$ 代入(2.1)式,得到孤子静止质量为:

$$\begin{aligned} M_0(a) = 4\pi \int r^2 dr \left\{ \frac{F_\pi^2}{8} \left[\left(a_0^2 + \frac{a^2}{3} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 + \frac{2\sin^2 F}{r^2} \left(a_0^2 + \frac{a^2}{3} \right) + \frac{16a^2}{3r^2} \sin^4(F/2) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{e^2 r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \left[\sin^2 F \left(a_0^2 + \frac{2a^2}{3} \right) + \sin^4(F/2) \left(\frac{a^2}{3} + \frac{3a^4}{5} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2e^2 r^2} \left[\frac{8a^2}{3r^2} \left(4a_0^2 + \frac{a^2}{5} \right) \sin^2 F \sin^4(F/2) + \frac{a_0^2}{r^2} \sin^4 F \left(a_0^2 + \frac{2a^2}{3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{16}{3r^2} a^4 \sin^8(F/2) \right] \right\} \quad (2.6) \end{aligned}$$

对上式进行变分,可得运动方程:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{2a^2}{3} \right) \xi^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2a^2}{3} \right) \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \\ + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2a^2}{3} \right) \sin F \cos F + a^2 \sin^2(F/2) \sin F \\ + \left[-2\sin^2(F/2) \left(\frac{a^2}{2} + \frac{3a^4}{5} \right) + \frac{1}{2} \sin^2 F \left(3a^2 - 4 + \frac{3a^4}{5} \right) \right] \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \\ - \left[\sin^2(F/2) \sin F \left(3a^2 - 4 + \frac{3a^4}{5} \right) + \sin F \left(2 - \frac{4a^2}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

与
将
代

表

或

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{\xi^2} \left[\sin^2(F/2) \sin F \left(\frac{232}{15} a^4 - \frac{32}{3} a^2 \right) - \sin^3 F \left(\frac{16}{5} a^4 - 2 \right) \right. \\ & \left. - \sin^2(F/2) \sin^3 F \left(\frac{64}{5} a^4 - 16a^2 + 4 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中, $\xi = eF\pi r$ 为无量纲常数.

三、集体坐标量子化

设 U_0 为静态孤子解, 则 QU_0Q^{-1} (Q 为 $SU(2)$ 常值矩阵) 也是静态孤子解, 且具有与 U_0 相同的能量. 因此, 我们可令 Q 与时间有关, 即令,

$$Q(t) = q_0(t) + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{q}(t) \quad (3.1)$$

将其作为动力学变量来处理. 将

$$U(\mathbf{x}) = Q(t)U_0(\mathbf{x})Q^{-1}(t) \quad (3.2)$$

代入(2.1)式, 并进行空间积分后, 我们得到一个以 $Q(t)$ 为集体坐标的拉氏量

$$L[Q, \dot{Q}] = \int d^3x \mathcal{L}(U(\mathbf{x})) \quad (3.3)$$

再通过正则方法即可得到系统的哈密顿量.

将(2.3)、(3.2)式代入拉氏量(2.1)式, 对空间积分后, 得,

$$L = -M_0 - \frac{F_\pi^2}{16} \int d^3x \text{Tr} [\partial_0 U U^{-1} \partial_0 U U^{-1}] - \frac{1}{16e^2} \int d^3x \text{Tr} [\partial_i U U^{-1}, \partial_i U U^{-1}]^2 \quad (3.4)$$

其中, M_0 为经典质量, 由(2.6)式给出.

将 $U(\mathbf{x})$ 的具体表达式代入(3.4)式, 经过冗长繁复的计算, 我们最后得到拉氏量的表达式为:

$$L = -M_0 + \frac{2a^2}{m_1} \mathbf{s}^2 + \frac{2}{m_2} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s})^2 \quad (\boldsymbol{\alpha} \neq 0) \quad (3.5)$$

$\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的情形是文献[7]的情形.

在(3.5)式中, \mathbf{s} 由下式定义

$$Q^{-1}\dot{Q} = i\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{q}\dot{q}_0 - \dot{\mathbf{q}}q_0 + \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) = i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{s} \quad (3.6)$$

而

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{\mu_1} + V, \quad \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu_2} - V \quad (3.7)$$

这里, V 为物理空间的总体积. $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}$ 是两个非常复杂的积分.

为写出哈密顿量, 定义矩阵 $A_i = i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, 则

$$\begin{cases} \text{Tr}(Q^{-1}\dot{Q}A_iQ^{-1}\dot{Q}A_i^{-1}) = -2[2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s})^2 - a^2s^2] \\ \text{Tr}(Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1}\dot{Q}) = -2s^2 \end{cases} \quad (3.8)$$

令 $\theta_a(t)$ ($a = 1, 2, 3$) 为表征矩阵 $Q(t)$ 的三个参量, 则我们可写出下式

$$Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta_a(t)} = ig_{ab} \frac{\tau_b}{2} \quad (3.9)$$

或

$$Q^{-1}\dot{Q} = Q^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta_a(t)} \dot{\theta}_a(t) = i\dot{\theta}_a(t) g_{ab} \frac{\tau_b}{2} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \text{Tr}(Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1}\dot{Q}) &= -\text{Tr}\left(\dot{\theta}_a g_{ab} \frac{\tau_b}{2} \dot{\theta}_c g_{cd} \frac{\tau_d}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \dot{\theta}_a g_{ab} \dot{\theta}_c g_{cb} = -\frac{1}{2} \dot{\theta}^T g g^T \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Q^{-1}\dot{Q}A_1Q^{-1}\dot{Q}A_1^{-1}) &= -\text{Tr}\left(\dot{\theta}_a g_{ab} \frac{\tau_b}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha} \dot{\theta}_c g_{cd} \frac{\tau_d}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right) \\ &= -\dot{\theta}_g P g^T \dot{\theta} + \frac{a^2}{2} \dot{\theta}^T g g^T \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

这里,

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}$$

将(3.8)、(3.11)、(3.12)式代入拉氏量,得

$$L = -M_0 + \frac{a^2}{2m_1} \dot{\theta}^T g g^T \dot{\theta} + \frac{1}{2m_2} \dot{\theta}^T g P g^T \dot{\theta} \quad (3.13)$$

则对应于 $\theta_a(t)$ 的广义动量为

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_r} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_r} \left[-M_0 + \frac{a^2}{2m_1} \dot{\theta}_a g_{ab} g_{cb} \dot{\theta}_c + \frac{1}{2m_2} \dot{\theta}_a g_{ab} P_{bc} g_{dc} \dot{\theta}_d \right] \\ &= \frac{a^2}{m_1} g_{rb} g_{ab} \dot{\theta}_a + \frac{1}{m_2} g_{rb} P_{bc} g_{dc} \dot{\theta}_d \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\text{即} \quad p = \left(\frac{a^2}{m_1} g g^T + \frac{1}{m_2} g P g^T \right) \dot{\theta}(t) = K \dot{\theta}(t) \quad (3.15)$$

$$\text{其中,} \quad K = \frac{a^2}{m_1} g g^T + \frac{1}{m_2} g P g^T \quad (3.16)$$

$$\text{所以,} \quad H = p \cdot \dot{\theta} - L = p^T \dot{\theta} - L = p^T K^{-1} p - L \quad (3.17)$$

$$\text{由(3.16)式,} \quad K^{-1} = \frac{1}{a^2} \left[m_1 (g^T)^{-1} g^{-1} - \frac{1}{a^2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} (g^T)^{-1} P g^{-1} \right] \quad (3.18)$$

$$\text{则,} \quad H = M_0 + \frac{m_1}{2a^2} p^T (g^T)^{-1} g^{-1} p - \frac{1}{2a^4} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} p^T (g^T) P g^{-1} p \quad (3.19)$$

正则量子化时,令

$$p_a = -i \frac{\partial}{\partial \theta_a} \quad (3.20)$$

由(3.9)式,可得

$$i[g_{ab}^{-1} p_b, Q] = g_{ab}^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \theta_b} = iQ \frac{\tau_a}{2} \quad (3.21)$$

这表明, $g_{ab}^{-1} p_b$ 产生一个 $SU(2)$ 的右移动,且 $(g^{-1}p)_a$ 作用在 Q 上,就象 $SU(2)$ 第 a 个生成元一样. 同样,对 $(Pg^{-1}p)_a$, 有

$$i[(Pg^{-1}p)_{ij} p_b, Q] = i p_{ji} Q \frac{\tau_i}{2} \quad (3.22)$$

因此, $(g^{-1}p)_a$ 正是角动量算符,而哈密顿量的本征函数,可由 Q 的多项式 $p(Q)$ 构成.

但

最

曲
 a^2
情

这样,可得能谱为

$$\begin{aligned} M &= M_0 + \frac{m_1}{2a^2} J(J+1) - \frac{1}{2a^4} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} (\alpha \cdot J)^2 \\ &= M_0 + \frac{m_1}{2a^2} J(J+1) - \frac{1}{2a^2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} J_a^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

但因为 $m_1 = \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + V} \rightarrow 0 (V \rightarrow \infty)$

$$\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \cdot \frac{m_1^2}{m_1 m_2} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}} \cdot \frac{\frac{1}{\mu_1} + V}{\frac{1}{\mu_2}} \rightarrow -\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

最后得:

$$M = M_0 + \frac{1}{2a^2} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} J_a^2 \quad (3.24)$$

这里, J 是孤子的自旋, J_a 是自旋 α 方向的分量.

四、数值计算结果

在 $B=2$ 的情形下,我们用计算机对运动方程(2.7)式进行了数值求解,得到其解的曲线 $F(r)$ (见下图),再由(2.6)式,可得经典质量,另外还计算了 μ_1 、 μ_2 . 以上各量都是 $a^2(0 < a^2 \leq 1)$ 的函数,下面,我们给出 a^2 取不同值时的结果. 在计算中,利用了 $SU(2)$ 情况下的常数 $F_\pi = 129 \text{ MeV}$, $e = 5.45$.

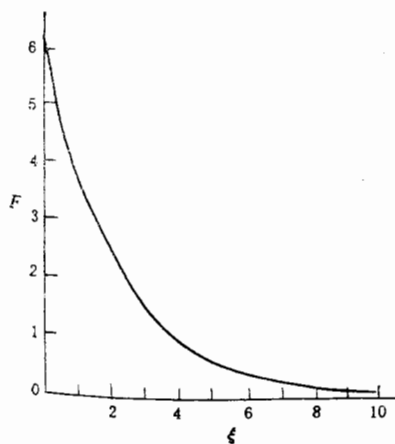


图 1

$a = 0.1$ $M_0 = 2.39 \text{ GeV}$
 $\mu_1 = 0.54 \text{ MeV}$ $\mu_2 = -40.82 \text{ MeV}$

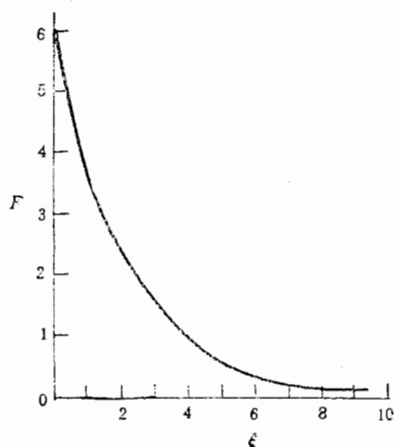


图 2

$a = 0.2$ $M_0 = 2.42 \text{ GeV}$
 $\mu_1 = 1.70 \text{ MeV}$ $\mu_2 = -51.28 \text{ MeV}$

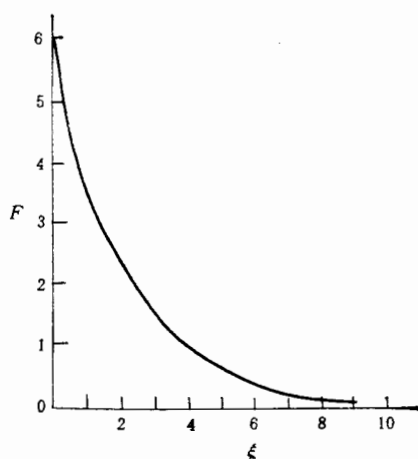


图 3

$$a = 0.3 \quad M_0 = 2.53 \text{ GeV} \\ \mu_1 = 4.39 \text{ MeV} \quad \mu_2 = -55.56 \text{ MeV}$$

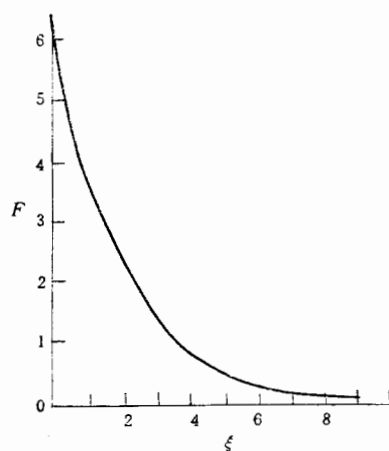


图 4

$$a = 0.5 \quad M_0 = 2.46 \text{ GeV} \\ \mu_1 = 11.36 \text{ MeV} \quad \mu_2 = -86.96 \text{ MeV}$$

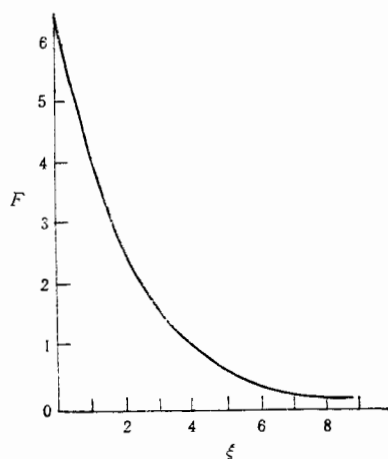


图 5

$$a = 0.7 \quad M_0 = 2.25 \text{ GeV} \\ \mu_1 = 26.49 \text{ MeV} \quad \mu_2 = 500 \text{ MeV}$$

上述结果仍与实验相符:

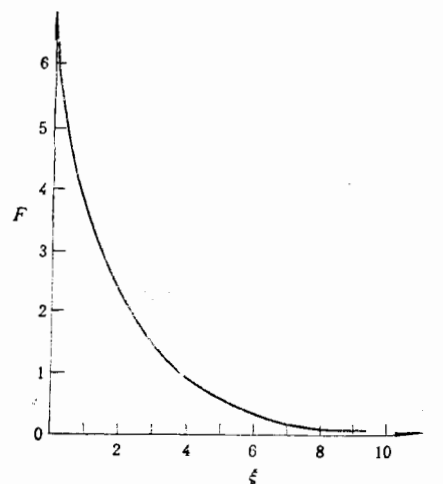


图 6

$$a = 0.9 \quad M_0 = 2.19 \text{ GeV} \\ \mu_1 = 37.67 \text{ MeV} \quad \mu_2 = 117.65 \text{ MeV}$$

五、分析与讨论

1) 本文所研究的位形是:

$$U_0(x) = \left(\cos \frac{F}{2} + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{x}} \sin \frac{F}{2} \right) (a_0 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \left(\cos \frac{F}{2} + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{x}} \sin \frac{F}{2} \right)$$

边界条件为:

$$\begin{cases} F(r) = z\pi, & r = 0 \\ F(r) \rightarrow 0, & r \rightarrow \infty \end{cases}$$

一
但
因
而

我
要
现
exp

它

个
ans

体
束
方

但是, 我们看到, 当 z 取 $\pm(2K+1)$ 时 (K 为整数), $U_0(x)$ 在 $r=0$ 处不能很好定义. 因此, z 只能取 $z=0, \pm 2, \pm 4, \dots$, 这等价于文献[13]的位形.

2) 我们看到, $U_0(x)$ 的量子能谱(3.24)式具有很奇特的性质. 其量子修正项是 J_z^2 而不是一般的 $J(J+1)$. 究其原因, 我们发现这是由 $U_0(x)$ 的对称性所决定的.

我们研究的位形是:

$$U_0(x) = \left(\cos \frac{F}{2} + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} \sin \frac{F}{2} \right) (a_0 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \left(\cos \frac{F}{2} + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} \sin \frac{F}{2} \right)$$

我们可以看到, 该位形在内部空间(同位旋空间)存在一个特殊方向 $\boldsymbol{\alpha}$. 这是由 $U_0(x)$ 中 $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ 项决定的. 而外部空间与内部空间通过 $\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}$ 发生关联. 因此, $U_0(x)$ 的对称性要求外部空间的转动不能是任意的. 这样, $U_0(x)$ 的对称性反映在结果中, 就是 J_z^2 的出现.

而导致量子能谱中 $J(J+1)$ 结果的位形, 如文献[7]中的位形, $U_0(x) = \exp(iF(r)\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{x}})$, 在内部空间和外部空间是不存在特殊方向的.

以上是我们从物理上对 J_z^2 项作的说明, 它与严格的数学推导是一致的.

3) 上述讨论适用于其他位形. 如有很多人研究过的“Hopf 位形”,

$$U_H(x) = (\cos F + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} \sin F)(a_0 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})(\cos F - i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} \sin F),$$

它的 $B=0$. 其量子能同样也会呈现奇特的性质.

4) 目前已有不少关于 $B=2$ 的情形研究, 然而总的情况还不能令人满意. 例如,

i) 在 hedgehog ansatz 下取 $F(0) = 2\pi$ 的边界条件^[15,16], 这种解的静质量约为单个 $B=1$ 孤子静质量的 3 倍, 显然, 这难以描述双核子系统. 最近, 有人研究了 hedgehog ansatz 的一个变种^[17], 得到了能谱, 但导致所谓奇特的 $B=2$ 的态.

ii) 具有不同中心的 product ansatz^[18,19]. 人们希望最终能利用这种位形解释低能两体核力的性质, 目前在这方面进展缓慢. 最近, 文献[20]研究的 analytic ansatz 给出了束缚态, 取得一些进展, 但对模型中某些参数值的解释还有待研究.

iii) 对 $B=2$ 解的研究还有一类是用与格点规范理论相类似的数值算法^[21]. 在这方面得到的一些结果, 与文献[20]所得类似.

附 录

(3.7)式中 $1/\mu_1, 1/\mu_2$ 的表达式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1} = & -\frac{8\pi}{a^2 e^3 F_n} \int \xi^2 d\xi \left[-\frac{1}{12} a_0^2 \sin^2 F - \frac{16}{105} a^2 \sin^4(F/2) + \frac{4}{3} a^2 \sin^2(F/2) \right. \\ & + \left(\frac{a_0^8}{3} + \frac{a_0^4 a^4}{35} - \frac{a_0^6 a^2}{35} \right) \sin^8 F(F')^2 + \left(\frac{82}{105} a_0^6 a^2 - \frac{2}{35} a_0^4 a^4 \right) \sin^6 F(F')^2 \\ & + \left(\frac{1}{3} a_0^4 a^4 - \frac{2}{3} a_0^4 - \frac{4}{5} a^4 \right) \sin^4 F(F')^2 + \left(-\frac{112}{35} a_0^6 a^2 + \frac{16}{63} a_0^2 a^6 - \frac{32}{35} a_0^4 a^4 \right) \sin^2(F/2) \sin^6 F(F')^2 \\ & + \left(\frac{24}{35} a_0^4 a^4 - \frac{8}{35} a_0^2 a^6 - \frac{16}{35} a_0^4 a^2 \right) \sin^2(F/2) \sin^4 F(F')^2 + \frac{4}{35} a_0^2 a^6 \sin^2(F/2) \sin^2 F(F')^2 \\ & \left. + \left(\frac{32}{105} a_0^6 a^2 + \frac{51}{735} a_0^2 a^6 + \frac{4}{35} a_0^4 a^4 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^8 F + \left(\frac{64}{105} a_0^4 a^4 - \frac{2}{35} a_0^2 a^6 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^6 F \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{32}{105} a_0^2 a^6 - \frac{32}{105} a_0^2 a^2 + \frac{8}{35} a^8 + \frac{2}{15} a^4 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^4 F + \frac{12}{35} a_0^4 a^4 \frac{1}{\xi^2} \sin^2(F/2) \sin^8 F \\
& + \left(-\frac{12}{35} a_0^4 a^4 - \frac{32}{315} a_0^2 a^6 + \frac{16}{63} a^8 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^2(F/2) \sin^6 F + \left(\frac{64}{315} a_0^2 a^6 + \frac{32}{315} a^8 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^2(F/2) \sin^4 F \\
& + 4 a_0^2 a^2 \frac{1}{\xi^2} \sin^2(F/2) \sin^2 F - \frac{64}{35} a_0^2 a^6 \frac{1}{\xi^2} \sin^4(F/2) \sin^4 F + \frac{16}{15} a_0^2 a^6 \frac{1}{\xi^2} \sin^2(F/2) \sin^6 F \\
& + \left(\frac{1}{35} a_0^6 a^2 + \frac{1}{63} a_0^2 a^6 - \frac{2}{35} a_0^2 a^4 \right) \sin^6 F \sin^2 F(F')^2 + \frac{6}{35} a_0^4 a^4 \sin^4 F \cos^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{1}{35} a_0^2 a^6 - a_0^4 + \frac{1}{3} a_0^2 a^2 - \frac{4}{5} a^4 \right) \sin^2 F \cos^2 F(F')^2 - \frac{12}{35} a_0^4 a^2 \sin^2(F/2) \sin^6 F \cos^2 F(F')^2 \\
& + \left(\frac{4}{99} a^8 - \frac{8}{63} a_0^2 a^6 \right) \sin^2(F/2) \sin^4 F \cos^2 F(F')^2 - \frac{64}{63} a_0^2 a^6 \sin^4(F/2) \sin^4 F \cos^2 F(F')^2 \\
& + \frac{4}{35} a^8 \sin^2(F/2) \cos^2 F(F')^2 + \left(\frac{4}{35} a_0^6 a^2 + \frac{12}{35} a_0^4 a^4 \right) \sin^2(F/2) \sin^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{8}{35} a_0^6 a^2 + \frac{8}{35} a_0^4 a^4 \right) \sin^6(F/2) \sin^2 F(F')^2 + \frac{4}{35} a_0^4 a^4 \sin^4(F/2) \sin^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{8}{35} a_0^4 a^4 \right) \sin^7(F/2) \sin^2 F(F')^2 \\
& + \left(\frac{16}{35} a_0^4 a^4 - \frac{16}{63} a_0^2 a^6 \right) \sin^6(F/2) \sin^2 F(F')^2 + \left(-\frac{32}{35} a_0^4 a^4 + \frac{32}{63} a_0^2 a^6 \right) \sin^8(F/2) \sin^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{32}{35} a_0^2 a^6 \right) \sin^9(F/2) \sin F(F')^2 + \frac{16}{35} a_0^2 a^6 \sin^6(F/2) \sin F(F')^2 + \frac{32}{35} a_0^4 a^4 \sin^4(F/2) \sin^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{8}{35} a_0^6 a^2 + \frac{16}{35} a_0^4 a^4 - \frac{8}{63} a_0^2 a^6 \right) \sin^2(F/2) \sin^6 F \cos F(F')^2 \\
& + \left(\frac{32}{63} a_0^4 a^4 - \frac{16}{35} a_0^2 a^6 \right) \sin^2(F/2) \sin^4 F \cos F(F')^2 \\
& + \left(\frac{32}{35} a_0^6 a^2 - \frac{32}{35} a_0^4 a^4 \right) \sin^4(F/2) \sin^6 F(F')^2 + \frac{64}{315} a_0^2 a^6 \frac{1}{\xi^2} \sin^4(F/2) \sin^2 F \\
& - \frac{16}{63} a_0^2 a^6 \sin^4(F/2) \sin^2 F \cos^2 F(F')^2 \\
& + \frac{32}{63} a_0^2 a^6 \sin^4(F/2) \sin^4 F \cos^2 F(F')^2 - \frac{2}{3} a^2 \frac{1}{\xi^2} \sin^2 F - \frac{16}{35} a^4 \frac{1}{\xi^2} \sin^4(F/2) \\
& + \left(-\frac{32}{105} a^4 - a_0^2 a^2 \right) \sin^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{1}{3} a_0^2 - \frac{2}{3} a_0^2 a^2 + \frac{1}{35} a^4 \right) \cos^2 F(F')^2 + \left(-\frac{8}{35} a_0^2 a^2 \right) \sin^2(F/2) \sin^2 F \cos F(F')^2 \\
& + \frac{4}{35} a_0^2 a^2 \sin^4(F/2) \sin^2 F(F')^2 + \left(\frac{1}{35} a_0^2 a^2 + \frac{1}{5} a^4 \right) \sin^2 F \cos^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{128}{35} a_0^2 a^2 + \frac{8}{15} a^4 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^4(F/2) \sin^2 F \\
& + \left(\frac{4}{35} a^4 - \frac{4}{35} a_0^2 a^2 \right) \sin^4(F/2) \cos^2 F(F')^2 \Big] \\
\frac{1}{\mu_2} = & -\frac{8\pi}{c^3 F_*} \int \xi^2 d\xi \left[\frac{6}{35} \sin^4(F/2) - \frac{1}{6} \sin^2(F/2) + \left(\frac{4}{35} a_0^4 a^2 - \frac{12}{35} a_0^6 \right) \sin^8 F(F')^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{457}{405} a_0^6 - \frac{107}{105} a_0^4 a^2 + \frac{1}{5} a_0^2 a^4 \right) \sin^6 F(F')^2 + \left(4 a_0^4 a^2 + 2 a_0^6 - \frac{2}{3} a_0^2 a^4 \right) \sin^4 F(F')^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1144}{105} a_0^6 - \frac{4}{21} a_0^2 a^4 + \frac{16}{7} a_0^4 a^2 \right) \sin^2(F/2) \sin^6 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{2099}{105} a_0^4 a^2 - \frac{32}{35} a_0^2 a^4 \right) \sin^2(F/2) \sin^4 F(F')^2 \\
& - \frac{256}{35} a_0^4 a^2 \sin^4(F/2) \sin^4 F(F')^2 + \left(\frac{26}{105} a_0^2 a^4 - \frac{4}{35} a_0^4 a^2 - \frac{6}{35} a_0^6 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^8 F + \left(a^6 + \frac{2}{3} \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^2 F \\
& + \left(a_0^4 - \frac{221}{105} a_0^2 a^2 + \frac{2}{35} a_0^2 a^4 - \frac{2}{3} a_0^2 a^2 + \frac{23}{35} a_0^6 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^6 F \\
& + \left(-\frac{6}{35} a_0^2 + \frac{2}{21} a_0^2 a^2 + \frac{4}{15} a_0^6 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^4 F \\
& + \left(\frac{496}{105} a_0^4 a^2 + \frac{152}{105} a_0^2 a^4 - \frac{16}{231} a_0^6 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^2(F/2) \sin^6 F + \left(-\frac{838}{105} a_0^2 a^4 - \frac{32}{105} a_0^6 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^2(F/2) \sin^4 F \\
& + \left(4a_0^2 + \frac{1}{35} a_0^6 - \frac{8}{15} a_0^2 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^2(F/2) \sin^2 F - \frac{256}{35} a_0^2 a^4 \frac{1}{\xi^2} \sin^4(F/2) \sin^4 F \\
& + \left(-\frac{192}{35} a_0^4 a^2 + \frac{352}{315} a_0^2 a^4 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^4(F/2) \sin^6 F \\
& + \left(\frac{6}{35} a_0^6 - \frac{8}{35} a_0^4 a^2 + \frac{2}{15} a_0^2 a^2 \right) \sin^6 F \cos^2 F(F')^2 + \left(\frac{287}{105} a_0^2 a^2 - \frac{1}{5} a_0^2 a^4 + \frac{1}{7} a_0^6 \right) \sin^4 F \cos^2 F(F')^2 \\
& + \left(\frac{68}{21} a_0^2 a^4 + \frac{1}{35} a_0^2 a^2 - \frac{2}{5} a_0^6 \right) \sin^2 F \cos^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{163}{35} a_0^4 a^2 + \frac{38}{21} a_0^2 a^4 - \frac{37}{99} a_0^6 \right) \sin^2(F/2) \sin^4 F \cos^2 F(F')^2 \\
& + \left(\frac{542}{105} a_0^2 a^4 + \frac{8}{21} a_0^6 \right) \sin^2(F/2) \sin^2 F \cos^2 F(F')^2 + \left(\frac{256}{35} a_0^4 a^2 - \frac{64}{7} a_0^2 a^4 \right) \sin^4(F/2) \sin^4 F \cos^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{4}{3} a_0^2 - \frac{26}{15} a_0^6 - \frac{4}{5} a_0^2 \right) \sin^2(F/2) \cos^2 F(F')^2 + \left(\frac{24}{35} a_0^6 - \frac{16}{35} a_0^4 a^2 \right) \sin^4(F/2) \sin^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{48}{35} a_0^6 + \frac{32}{35} a_0^4 a^2 \right) \sin^6(F/2) \sin^2 F(F')^2 + \left(\frac{212}{105} a_0^4 a^2 - \frac{4}{5} a_0^2 a^4 \right) \sin^4(F/2) \sin^2 F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{48}{35} a_0^4 a^2 \right) \sin^2(F/2) \sin^2 F(F')^2 + \left(\frac{444}{105} a_0^4 a^2 - \frac{596}{315} a_0^2 a^4 \right) \sin^6(F/2) \sin^2 F(F')^2 \\
& + \frac{4}{3} a_0^2 a^4 \sin^4(F/2) \sin F(F')^2 - \frac{8}{3} a_0^2 a^4 \sin^2(F/2) \sin F(F')^2 \\
& + \left(\frac{86}{35} a_0^4 a^2 - \frac{4}{21} a_0^4 a^2 \right) \sin^8(F/2) \sin^3 F(F')^2 \\
& + \frac{48}{35} a_0^2 a^4 \sin^6(F/2) \sin F(F')^2 - \frac{138}{35} a_0^2 a^4 \sin^2(F/2) \sin F(F')^2 + \frac{32}{5} a_0^2 a^4 \sin^8(F/2) \sin F(F')^2 \\
& + \left(\frac{4}{3} a_0^6 - 2a_0^4 a^2 + \frac{4}{7} a_0^2 a^4 \right) \sin^6 F \cos F(F')^2 + \left(\frac{4}{3} a_0^2 a^4 - \frac{4}{3} a_0^2 \right) \sin^2 F \cos F(F')^2 \\
& + \left(\frac{20}{3} a_0^4 a^2 - 2a_0^2 a^4 \right) \sin^4 F \cos F(F')^2 + \left(-\frac{48}{35} a_0^6 + \frac{64}{135} a_0^4 a^2 - \frac{48}{63} a_0^2 a^4 \right) \sin^2(F/2) \sin^6 F \cos F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{32}{5} a_0^4 a^2 + \frac{64}{35} a_0^2 a^4 \right) \sin^2(F/2) \sin^4 F \cos F(F')^2 \\
& + \left(-\frac{48}{35} a_0^2 a^4 + \frac{48}{35} a_0^2 \right) \sin^2(F/2) \sin^2 F \cos F(F')^2 \\
& + \left(8a_0^4 a^2 - \frac{8}{5} a_0^2 a^4 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^2 F + \left(-\frac{16}{3} a_0^4 a^2 + \frac{152}{35} a_0^2 a^4 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^2(F/2) \sin^2 F \\
& + \frac{8}{3} a_0^2 a^4 \frac{1}{\xi^2} \sin^2 F - \frac{16}{3} a_0^2 a^4 \frac{1}{\xi^2} \sin^2(F/2) \sin^2 F + \left(-\frac{32}{5} a_0^4 a^2 - \frac{352}{105} a_0^2 a^4 \right) \frac{1}{\xi^2} \sin^4(F/2) \sin^2 F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{4}{5} a_0^4 a^2 - \frac{32}{21} a_0^2 a^4 \right) \sin^4(F/2) \sin^3 F \cos^2 F (F')^2 + \frac{232}{105} a^2 \frac{1}{\xi^2} \sin^4(F/2) \\
& + \left(\frac{2}{3} a_0^2 + \frac{6}{35} a^2 \right) \cos^2 F (F')^2 + \left(-\frac{1}{35} a^2 + a_0^2 \right) \sin^2 F (F')^2 \\
& + \frac{24}{35} a_0^2 \sin^4(F/2) \sin^2 F (F')^2 - \frac{4}{3} a_0^2 \sin^2(F/2) \sin^2 F (F')^2
\end{aligned}$$

上面, $F' = \frac{\partial F}{\partial \xi}$.

参 考 文 献

- [1] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B160** (1979), 57.
[2] T. H. E. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.*, **A260**(1961). 127.
[3] D. Finkelstein and J. Rubinstein, *J. Math. Phys.*, 9(1968), 1762.
[4] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B223**(1983), 422.
[5] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B223**(1983), 433.
[6] E. Guadagnini, *Nucl. Phys.*, **B236**(1984), 35.
[7] G. Adkins, C. Nappi and E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B228**(1983), 552.
[8] G. Adkins and C. Nappi, *Phys. Lett.*, **137B**(1984), 251.
[9] G. Adkins and C. Nappi, *Nucl. Phys.*, **B233**(1984), 109.
[10] P. O. Mazur, M. A. Nowak and M. Praszalowicz, *Phys. Lett.*, **147B**(1984), 137.
[11] K. Fujii, S. Otsuki and F. Toyoda, KYUSHU-84-HE-5(1984).
[12] K. Fujii, S. Otsuki and F. Toyoda, *Prog. Theor. Phys.*, **73**(1985), 524, 1287.
[13] Huang Tao, Wen Jiaru, Zhou Xianjian, *Chinese Phys. Lett.*, **V. 3**, N. 2(1986), 85.
[14] J. Goldstone and F. Wilczk, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 986.
[15] E. B. Bogomol'nyi and V. A. Fateev, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **37**(1983), 134.
[16] A. Jackson, A. D. Jackson and V. Pasquier, *Nucl. Phys.*, **A. 432**(1984), 567.
[17] H. Weigal, B. Schwesinger and G. Holzwarth, *Phys. Lett.*, **168B**(1986), 321.
[18] R. Vinh Mau, M. Lacombe, B. Loiseau, W. N. Cottingham and P. Lisboa *Phys. Lett.*, **150B**(1985), 259.
[19] U. G. Meissner and U. B. Kaulfuss, *Phys. Rev.*, **C30**(1984), 2058.
[20] E. Sorce and M. Tarlini, *Phys. Rev.*, **D33**(1986), 253.
[21] H. M. Sommermann, H. W. Wyld, and C. J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 476.

THE STUDY OF A SOLITON SOLUTION IN THE
SKYRME MODEL WITH $B=2$

GAO XIAOCHUN, WANG YONG
(Zhejiang University, Hangzhou)

ABSTRACT

A special kind of soliton solution in the skyrme model with the baryon number $B=2$ is investigated and quantized. The resultant mass spectrum is found to possess some peculiar properties but still in agreement with experiments. Our further studies show that it is impossible to construct the above mentioned soliton solution in the case with $B=1, 3, 5, \dots$, while on the other hand there exists such soliton solution in the case with $B=0, 4, \dots$, as well, which also leads to the afore mentioned peculiar properties. Finally, it is worthwhile to note that the $B=0$ soliton is just the famous "Hopf soliton".

仅
在

和
子

反
论
经

这

是
谓
的