12卷 第6期　　高能物理与核物理　　Vol. 12, No. 6
988 年11月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Nov., 1988

快报

协变规范反常的正则程式推导

陈　伟

(中国高等科学技术中心(世界实验室)中国科学院高能物理研究所，北京)

摘　　要

本文对费米子流做协变正规化，通过正则程式，推导出手征规范理论的流散度反常和高斯律对易子反常的协变形式.

理论具有的经典对称性量子化之后不再保持这一现象称作反常. 而手征规范反常可归结为手征费米子流的散度非零. 不久前，Faddeev 建议[1]，, 将手征规范理论取做规范群的投影表示，则费米子流散度反常相应于规范群的 1-Cocycle，他指出，规范群的 2-Cocycle 也与规范反常相联系，以无穷小形式，反常应当表现为规范理论的高斯律算子代数有非平庸的中心扩充. 文献[2，3]的作者用(微扰论空时) BJL 方法计算规范代数的 Schwinger 项，证实了 Faddeev 的想法. 他们的结果满足 2-Cocycle 条件，定义为自洽反常，这定义和自洽流散度反常的定义相一致.

粗看起来，高斯律反常最直接的推导似乎是计算等时对易子，不过迄今还没有人能用固定时办法得到 Faddeev 的结果[4]. 另一方面，反常的协变形式无疑对反常的研究十分重要. 而这两个问题都和正规化有关. 本文对双线性费米场算子做留数正规化[5]，在正则量子化程序下推导协变流散度反常和协变高斯律对易子反常，并对所得结果做一些讨论.

我们工作在 1 + 3 维. 取 Weyl 规范，$A_0^a = 0$，手征费米子，

$$\psi_L(x) = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi(x),$$

和规范场耦合系统的哈密顿则可写成

$$H = \int d^3x(\mathscr{H}_{\rm Fermi} + \mathscr{H}_A) \tag{1a}$$

$$\mathscr{H}_{\rm Fermi} = \psi_L^+(x)\gamma_4\gamma_i(\partial_i + A_i)\psi_L(x) \tag{1b}$$

$$\mathscr{H}_A = \frac{1}{2}\,E_i^a(x)E_i^a(x) + \frac{1}{4}\,F_{ij}^a(x)F_{ij}^a(x) \tag{1c}$$

正则量子化要求基本等时对易子

$$\begin{aligned}&[E_i^a(x), A_j^b(y)] = i\delta_{ij}\delta^{ab}\delta^3(x-y),\\ &\{\psi^\alpha(x), \psi^{\beta+}(y)\} = \delta^{\alpha\beta}\delta^3(x-y),\ \text{其它}=0.\end{aligned} \tag{2}$$

本文 1988 年 4 月16日收到.

定义经典费米子流，$j^a_\mu(x)=\psi^+_L(x)\gamma^4\gamma_\mu T^a\psi_L(x)$，其中 T^a 是规范群的生成元，$T^{a+}=-T^a$. 熟知，定义在同一时空点的费米场乘积在量子化下将有奇异，因此需要做正规化. 我们通过留数正规化来重新定义费米子流和费米子哈密顿：

$$j^a_\mu(x)\to\hat{j}^a_\mu(x)=\oint_c\frac{dz}{2\pi i}\,\bar{\Psi}_L(x)\gamma_\mu T^a\,\frac{1}{z-D^2}\,\psi_L(x),\tag{3}$$

$$\mathscr{H}_{\text{Fermi}}(x)\to\hat{\mathscr{H}}_{\text{Fermi}}(x)=\oint_c\frac{dz}{2\pi i}\,\bar{\Psi}_L(x)\gamma_i D_i\,\frac{1}{z-D^2}\,\psi_L(x),\tag{4}$$

其中，$D=i\gamma_iD_i=i\gamma_i(\partial_i+A_i)$ 是厄米算子；复平面上积分迴路 c 包围正规化因子 $1/(z-D^2)$ 的所有极点. 不难证明，这样定义的正规化不破坏理论的协变性.

将费米场 $\psi(x)$ 按能量算子 $H=\gamma_4\gamma_iD_i$ 的本征态 $\{\varphi_n\}$ 展开，

$$\psi(x)=\sum_{E_n>0}\alpha_n\varphi_n+\sum_{E_n\leqslant 0}\beta^+_n\varphi_n;$$

那么，有 $\{\alpha_n,\alpha^+_m\}=\{\beta_n,\beta^+_m\}=\delta_{n,m}$；相应地，定义在(量子化)背景场位形 $A(x)$ 下的费米子真空态为 $|\ \rangle_A$，使 $\alpha_n|\ \rangle_A=\beta_n|\ \rangle_A=0$.

考察费米子荷密度满足的哈密顿方程

$$\dot{\hat{j}}^a_0(x)=-i[\hat{j}^a_0(x),\hat{H}_{\text{Fermi}}+\hat{H}_A].\tag{5}$$

由对易关系(2)，直接可证，上式右边第一个对易子

$$i[\hat{j}^a_0(x),\hat{H}_{\text{Fermi}}]=(D_i\hat{j}_i(x))^a.\tag{6}$$

注意到 $\hat{H}_A$ 中含有电场强度 $E^a_i(x)$ (可表示为 $i^\delta/\delta A^a_i(x)$) 的二次项，而正规化荷密度是规范势 $A^a_i(x)$ 依赖的(见(3)式)，则可预期(5)式右边第二个对易子有非零贡献，这给出流散度反常. 让我们先算 $E^b_i(y)$ 和 $\hat{j}^a_0(x)$ 的对易子的真空期望.

$$\begin{aligned}{}_A\langle i[\hat{j}^a_0(x),E^b_i(y)]\rangle_A&=\left\langle -i\,\frac{\delta}{\delta A^b_i(y)}\oint_c\frac{dz}{2\pi i}\,\psi^+_L(x)T^a\,\frac{1}{z-D^2}\,\psi_L(x)\right\rangle_A\\&=-i\lim_{h\to x}\oint_c\frac{dz}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1+\gamma^5}{2}\,T^a\,\frac{\delta}{\delta A^b_i(y)}\,\frac{1}{z-D^2_x}\,P_-(x,h),\end{aligned}\tag{7}$$

式中，Tr 标记 Dirac 矩阵和规范指标的求迹，而 $P_-(x,y)$ 是负能投影算子:

$$P_-(x,y)=\sum_{E_n\leqslant 0}\varphi_n(x)\varphi^+_n(y)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,P_-(p)e^{-ip\cdot(x-y)},\tag{8}$$

其 Fourier 变换 $P_-(p)$ 可做微扰展开

$$P_-(p)=\sum_{i=0}^{\infty}P^{(i)}_-(p)\tag{9a}$$

$$P^{(0)}_-(p)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{i\gamma\cdot p\gamma^4}{|p|}\right),\ (\gamma\cdot p=\gamma^ip^i),\tag{9b}$$

$$\begin{aligned}P^{(1)}_-(p)=&\int\frac{d^3\xi}{(2\pi)^3}\,e^{-i\xi y}\tilde{A}_k(\xi)\,\frac{1}{2(|p|+|p+\xi|)}\\&\cdot\left(\gamma^k\gamma^4-\frac{p\cdot\gamma\gamma^k(p+\xi)\cdot\gamma\gamma^4}{|p||p+\xi|}\right),\end{aligned}\tag{9c}$$

…….

将 $P_-(x,h)$ 中的因子 $e^{-ip\cdot(x-h)}$ 移到算子 $\frac{1}{z-D_x^2}$ 的左边，再取极限 $h\to x$，(7)式中留下一个无限求和

$$\lim_{h\to x}\frac{1}{z-D_x^2}e^{-ip\cdot(x-h)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(D'^2)^n}{(z-p^2)^{n+1}}\tag{10a}$$

$$(D')^2=2p_iD_i-D_i^2-\frac{1}{2}\gamma_i\gamma_jF_{ij}.\tag{10b}$$

无穷级数(9)和(10)代入(7)式做计算时，由于有 Tr 和 $\oint_c\frac{dz}{2\pi i}$ 两个操作，只有前二，三项有非零贡献．一些运算之后，得到

$$_A\langle i[j_0^a(x),E_j^b(y)]\rangle_A=\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{j4lm}\mathrm{Tr}F_{lm}\{T^a,T^b\}\delta^3(x-y)\tag{11}$$

(11)和(6)式代入(5)式，我们得到流散度协变反常

$$\langle(D_\mu\hat{j}_\mu)^a\rangle_A=-\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{i0jk}\mathrm{Tr}T^a\{E_i(x),F_{jk}(x)\}.\tag{12}$$

现在讨论高斯律反常．高斯律 $G^a(x)=0$，作为第一类约束，其算子 $G^a(x)$ 满足规范代数

$$[G^a(x),G^b(y)]=if^{abc}G^c(x)\delta^3(x-y),\tag{13}$$

$G^a(x)$ 是规范群的生成元： $G^a(x)=-(D\cdot E(x))^a+j_0^a(x)$．量子化下，(13)式可能有中心扩充，记作 $W^{ab}(x,y)$．我们来计算正则量子化(2)下的中心项的真空期望，$\langle W_{ab}\cdot(x,y)\rangle_A$，即高斯律对易子反常．

由定义(3)和关系(9)，(10)式，我们得到

$$\begin{aligned}&\langle[\hat{j}_0^a(x),\hat{j}_0^b(y)]\rangle_A-if^{abc}\langle\hat{j}_0^c(x)\rangle_A\delta(x-y)\\&=-\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{i0jk}\mathrm{Tr}F_{jk}((\{T^a,T^b\}\partial_i)+\{T^a,[A_k,T^b]\})\delta^3(x-y).\end{aligned}\tag{14}$$

我们还有

$$[(D_i\cdot E_i)^a(x),(D_jE_j)^b(y)]-if^{abc}(D_i\cdot E_i)^c(x)\delta^3(x-y)=0\tag{15}$$

这意味着规范场的规范变换生成元的代数在正则量子化下没有反常．而由(11)式，我们得交叉项的反常

$$\begin{aligned}&_A\langle[(D_iE_i)^a(x),\hat{j}_0^b(y)]\rangle_A={}_A\langle D_i^{aa'}[E_i^{a'}(x),\hat{j}_0^b(y)]\rangle_A\\&=-\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{i0jk}\mathrm{Tr}F_{jk}(\{T^a,T^b\}\partial_i+\{[T^a,A_i],T^b\})\delta^3(x-y).\end{aligned}\tag{16}$$

综合(14)—(16)式，以一个更紧凑的形式，我们得到协变高斯律对易子反常

$$\begin{aligned}&_A\left\langle\int d^3xd^3yu^a(x)v^b(y)([G^a(x),G^b(y)]-if^{abc}G^c(x)\delta(x-y))\right\rangle_A\\&=\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{i0jk}\int d^3x\mathrm{Tr}F_{jk}(uD_iv+D_ivu).\end{aligned}\tag{17}$$

最后，我们做二点讨论． 1.关于和自洽反常的比较．流散度反常已经很清楚：协变形式和自洽形式只差到一个流的重新定义．如在(3)式中，重新取一个正规化因子，我们

可得到费米子流散度反常的自洽形式. 但对高斯律反常的协变形式和自洽形式之间尚无法建立这样的联系. 这是因为,前者在本文中由正则量子化得到; 而后者是由 BJL 办法推出, BJL 办法,给出电场强度的对易子非零(以致 A_i^a 和 E_j^b 不满足 Jacobi 恒等式), 是一个非正则量子化方案. 我们不知道怎样实现由量子化正则程式到非正则程式的过渡. 2. 可以有一个协变高斯律反常的微分几何分析. Faddeev 的规范代数的 2-Cocycle (被确认是(自洽)高斯律反常)是从一个6形式出发,通过下降方程"降"为3形式得到的; 这一系列中的4形式,亦即, 1-Cocycle 是流散度反常的自洽形式. 文献[6]建议了这一6形式和下降方程系列的"协变反常"类似, 并给出流散度反常的协变形式. 这一系列也给出高斯律反常的协变形式. 我们在另外的工作中将仔细讨论这一问题[7].

感谢 Faddeev 教授引起作者对高斯律反常的兴趣;感谢宋行长教授,郭汉英教授,侯伯元教授的有益讨论.

参考文献

[1] L. D. Faddeev, *Phys. Lett.*, **145B**(1984), 81.
[2] S. G. Jo, *Phys. Lett.*, **163B**(1985), 353.
[3] M. Kobayashi, K. Seo and A. Sugamoto, *Nucl. Phys.*, **B273**(1985), 607.
[4] S. G. Jo, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3179.
[5] Rongtai Wang and Guongjiong Ni, *J. Phys.*, **A20**(1987), 5849.
Wei Chen, Guongjiong Ni and Rongtai Wang, preprint, Wei Chen, preprint.
[6] Hanying Guo, Xingchong Song, Shikun Wang and Yueliang Wu, preprint AS-ITP-87-021.
[7] Wei Chen and Xingchang Song, in preparation.

DERIVATION OF CHIRAL GAUGE ANOMALIES IN CANONICAL FORMALISM

CHEN WEI

(CCAST (World Laboratory), Institute of High Energy Physics Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

Through a covariant regularization of the chiral fermion current, we derive the covariant fermion current divergence anomaly as well as the covariant Gauss law commutator anomaly of the chiral gauge theory in the canonichl formalism.