第13卷 第9期　高能物理与核物理　Vol. 13, No. 9
1989年9月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Sept., 1989

**快　报**

# 格点 Schwinger 模型弦张力的准确计算

郑　波
(中山大学，广州)

**摘　要**

本文应用具有可解准确基态的 Hamiltonians，准确计算了 Naive 和 Susskind 格点 Schwinger 模型的无穷长弦弦张力，结果均为 $\frac{1}{2}e^2$. 这表明格点 Schwinger 模型给出线性禁闭势，并且当 $a\to 0$ 时没有解除禁闭的相变发生，与连续理论符合. 同时，由于 Naive 费米子方案得到的结果与 Susskind 方案的一致，从而说明自由粒子能谱的"加倍问题"至少对相互作用理论中某些物理量的计算没有影响.

## 一、引　言

格点规范理论在强耦合区可以论证夸克禁闭. 当 $a\to 0$ 时，是否有解除禁闭的相变发生，是格点规范理论的根本问题之一. 人们在这方面做了大量工作，仍没有完全可靠的结论. 这里的原因有两方面. 第一，现有结果大体上是用 Monte Carlo 模拟得到，缺乏准确的解析分析结果；第二，人们还基本上没有涉足含费米子领域.

另一方面，费米子 Naive 格点化方案在自由粒子情形存在能谱的"加倍问题"，这时含相互作用理论有多大影响，至今亦是一个令人费解的谜.

本文应用具有可解准确基态的 Hamiltonians[1]，对 Naive 和 Susskind 两种费米子方案，准确计算了格点 Schwinger 模型的无穷长弦弦张力. 结果表明，当 $a\to 0$ 时，不会发生解除禁闭的相变，与连续理论符合[2]. 同时，也说明至少在某些方面 Naive 格点化可以得到正确的物理内容. 本文是一个用完全严格的解析方法研究含费米子格点规范理论的实例.

我们在第二节直接罗列弦张力的结果，第三节给出计算细节，最后是讨论.

## 二、模型及弦张力

具有可解准确基态的 Naive 格点 Schwinger 模型的 Hamiltonian 为[1]

$$H=\frac{1}{2}e^2a\sum_x e^{-CR_1}E(x)e^{2CR_1}E(x)e^{-CR_1} \tag{2.1}$$

本文1989年4月10日收到.

其中

$$R_1 = \sum_{\substack{x\\k=\pm 1}} \bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k), \tag{2.2}$$

$c$ 满足方程

$$-2c + 3\int_0^C dC' I_0(-4C') - 2CI_0(-4C) = \frac{1}{(ae)^2}, \tag{2.3}$$

$I_0(z)$ 为零阶虚宗量贝塞尔函数。取表象

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^+(x) \end{pmatrix}, \qquad \psi^+(x) = (\xi^+(x) \quad \eta(x)), \tag{2.5}$$

则

$$R_1 = -\sum_{\substack{x\\k=\pm 1}} (\xi^+(x)i^k U(x,k)\xi(x+k) - \eta(x)i^k U(x,k)\eta^+(x+k)). \tag{2.6}$$

定义参考态 $|0\rangle$ 满足

$$\begin{gathered} E(x)|0\rangle = 0, \\ \xi(x)|0\rangle = 0, \quad \eta(x)|0\rangle = 0, \end{gathered} \tag{2.7}$$

最简单的基态为

$$|\Omega\rangle = e^{CR_1}|0\rangle. \tag{2.8}$$

记一条规范场弦连结一对正反粒子的状态 $|M_n\rangle$ 为

$$\begin{gathered} |M_n\rangle = e^{CR_1}M_n^+|0\rangle, \\ M_n^+ = \sum_{\substack{x\\ \Gamma=\pm n}} \zeta^+(x)i^\Gamma U(x,\Gamma)\eta^+(x+\Gamma), \\ U(x,\pm n) = \prod_{i=1}^{n-1} U(x\pm i, \pm 1). \end{gathered} \tag{2.9}$$

因为基态能量为零,所以无穷长弦弦张力为

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{na} \frac{\langle M_n|H|M_n\rangle}{\langle M_n|M_n\rangle}, \tag{2.10}$$

其中格距 $a$ 任意给定。

同样地,对 Susskind 费米子方案[3],具有可解准确基态的 Hamiltonian 为[1]

$$H_s = \frac{1}{2}e^2 a \sum_x e^{-CR_{s1}}E(x)e^{2CR_{s1}}E(x)e^{-CR_{s1}}, \tag{2.11}$$

$$R_{s1} = \sum_{\substack{x\\k=\pm 1}} (\xi^+(2x)i^k U(2x,k)\eta^+(2x+k) + \eta(2x+1)i^k U(2x+1,k)\xi(2x+1+k)). \tag{2.12}$$

这里正粒子场 $\xi^+(x)$ 和 $\xi(x)$ 只定义于偶格点，反粒子场 $\eta^+(x)$ 和 $\eta(x)$ 只定义于奇

格点，$C$ 仍满足(2.3)式．只要注意到每一格点只放置一费米场分量这点，我们可以用完全类似于 Naive 理论的方法，写出参考态 $|0_s\rangle$，基态 $|\Omega_s\rangle$，弦状态 $|M_n^s\rangle$ 及无穷长弦弦张力表达式

$$\alpha_s = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{na} \frac{\langle M_n^s | H_s | M_n^s \rangle}{\langle M_n^s | M_n^s \rangle}, \tag{2.13}$$

其中 $n$ 只取奇数．

第三节的计算表明，

$$\alpha = \alpha_s = \frac{1}{2} e^2, \tag{2.14}$$

与连续理论符合[2]．

## 三、弦张力的计算

这一节我们以 Naive 理论为例，证明(2.14)式成立．因为对任意给定的 $a$，即任意给定的 $C$，$\sum_{k=0}^{\infty} \langle 0 | M_n \frac{1}{(2k)!} (2CR_1)^{2k} M_n^+ | 0 \rangle$ 对全体 $n$ 一致收敛，所以，由(2.9)式，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle M_n | M_n \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle 0 | M_n e^{2CR_1} M_n^+ | 0 \rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{2k\to\infty} \sum_{k=0}^{k} \langle 0 | M_n \frac{1}{(2k)!} (2CR_1)^{2k} M_n^+ | 0 \rangle \\
&= \lim_{2k\to\infty} \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>2k}} \sum_{k=0}^{k} \langle 0 | M_n \frac{1}{(2k)!} (2C)^{2k} R_1^{2k} M_n^+ | 0 \rangle,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中考虑了 $R_1$ 的奇次幂无贡献．(3.1)式最后一等式的限制条件 $n > 2k$，使得只有图 1 所示的图形有贡献．图 1 左边部分表示正粒子的收缩路径，右边部分表示反粒子的收缩路径．从图 1 不难明白，

$$\langle 0 | M_n R_1^{2k} M_n^+ | 0 \rangle = \sum_x 2 \cdot 2^{2k} \frac{(2k)!}{k!k!}, \quad \text{当} \ n > 2k, \tag{3.2}$$

其中 $\frac{(2k)!}{k!k!}$ 为从原点出发走 $2k$ 步再回到原点的所有可能路径的数目．所以，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle M_n | M_n \rangle &= \sum_{\substack{k=0 \\ x}}^{\infty} 2 \frac{1}{k!k!} (4C)^{2k} \\
&= \sum_x 2 I_0(-8C).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

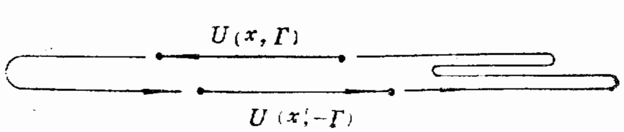


图 1

同样地，由(2.1)及(2.9)式，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na}\langle M_n|H|M_n\rangle$$

$$=\frac{1}{2}e^2 a\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{na}\langle 0|[M_n,E]e^{2CR_1}[M_n^+,E]|0\rangle$$

$$=\frac{1}{2}e^2\lim_{2k\to\infty}\lim_{\substack{n\to\infty\\ n>2k}}\sum_{k=0}^{k}\frac{-1}{n}\left\langle 0\left|[M_n,E]\frac{1}{(2k)!}(2CR_1)^{2k}[M_n^+,E]\right|0\right\rangle. \tag{3.4}$$

为方便计，我们略去了 $E(x)$ 的空间指标及求和号，显然，(3.4)式也只有图 1 的图形贡献．考虑到电场 $E$ 的作用效果，我们有

$$\sum_x 2(n-2k)2^{2k}\frac{(2k)!}{k!k!}\leqslant\langle 0|[M_n,E]R_1^{2k}[M_n^+,E]|0\rangle$$

$$\leqslant\sum_x 2n\cdot 2^{2k}\frac{(2k)!}{k!k!}. \tag{3.5}$$

因为

$$\lim_{2k\to\infty}\lim_{\substack{n\to\infty\\ n>2k}}\frac{-1}{n}\sum_{k=0}^{k}2\cdot 2k\frac{1}{k!k!}(4C)^{2k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}C\frac{d}{dC}I_0(-8C)=0, \tag{3.6}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na}\langle M_n|H|M_n\rangle=\frac{1}{2}e^2\sum_x 2I_0(-8C), \tag{3.7}$$

即

$$\alpha=\frac{1}{2}e^2. \tag{3.8}$$

同理可得

$$\alpha_s=\frac{1}{2}e^2. \tag{3.9}$$

(2.14)式得证．

## 四、讨　论

(1) 对任意 $a$，对远距离的一对正反粒子，格点 Schwinger 模型呈现线性禁闭势，弦张力为 $\frac{1}{2}e^2$.

(2) 当 $a\to 0$ 时，格点 Schwinger 模型没有解除禁闭的相变发生，与连续理论符合[2].

(3) Naive 格点化方案的结果与 Susskind 方案的结果一致，从而说明，自由粒子能

谱的"加倍问题"并非处处支配格点规范理论。

## 参 考 文 献

[1] 郑波，"格点 Schwinger 模型的准确基态"，投稿于《高能物理与核物理》；
Zheng Bo, "The exact ground state of lattice gauge theories", submitted to *Phys. Rev. D.*
[2] A. Casher, J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D10**(1974), 732; J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D11**(1975), 3594.
[3] L. Susskind, *Phys. Rev.* **D16**(1977), 3031.

# EXACT CALCULATION OF STRING TENSIONS OF LATTICE SCHWINGER MODELS

ZHENG BO
(*Zhongshan University, Guangzhou*)

ABSTRACT

In this paper string tensions of both the modified Naive and Susskind lattice Schwinger models which have the solvable exact ground states are calculated exactly. The linear potential between quark and antiquark infinitely seperated is derived for both Naive and Susskind lattice Schwinger models. No phase transition occurs when a tends to zero and this coincides with the continum theory.