第14卷 第7期 高能物理与核物理 Vol. 14, No. 7
1990年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 1990

简并量子力学体系演化的高级绝热近似与非阿贝尔诱导规范结构

孙昌璞
(东北师范大学物理系,长春)

摘　　要

在对称性变化的简并情况下，本文建议了一种逐级求解具有缓变参数的量子力学体系演化的解析方法——简并情况下的高级绝热近似方法. 本文不仅利用其零级近似证明了简并情况的量子绝热定理，并讨论了非阿贝尔诱导规范结构，而且指出了高级近似导致的非绝热效应. 采用本文的方法,以核四极共振问题为例，详细地分析了非阿贝尔诱导规范结构在绝热和非绝热实验过程中的可观察效应.

一、引　　言

几年来，Berry 相因子的研究在理论和实验两方面都取得了许多进展，它已经涉及到了从经典物理到量子物理的许多领域[1,2]. 联系于 Berry 相因子的概念,人们已经建议了一些求解具有缓变参数量子力学体系演化的解析方法，如逐次对角化方案[3-5]、WKB 方法[6] 和高级绝热近似[7,8]. 其中后者是由作者针对非简并和对称性不变的简并情况提出来的,并被用来处理经典带电粒子的动力学和物质中的中微子振荡问题[9,10]. 本文关于简并情况高级绝热近似的讨论则是作者上述工作的更一般的发展.

Wilczek 和 Zee 首先研究了简并量子态的绝热演化问题,提出了诱导规范结构和非阿贝尔 Berry 相因子的概念[11],后来的进一步讨论也是在绝热情况下进行的[12-14]. 本文则要以这些讨论为基础研究绝热条件破坏时的动力学问题. 本文不仅采用了简并情况的高级绝热近似方法，而且采用该方法详细地讨论核四极共振问题中的非绝热效应以及其中非阿贝尔诱导规范结构的表现.

二、高级绝热近似方法

设体系的哈密顿量 $\hat{H}=\hat{H}[R(t)]$ 依赖于缓变参数 $R(t)=(R_1(t), R_2(t),\cdots, R_N(t))$ 且具有变化着的对称性,其瞬时对称性群均同构于同一个群 G, 例如,体系具有绕

本文 1989 年 8 月 21 日收到.
本工作得到中国科学院理论物理研究所开放课题基金的资助.

方向变化轴的瞬时 $SO(2)$ 转动对称性．在不出现偶然简并的情况下，对于给定的 $R(t)$，$\hat{H}[R(t)]$ 对应于本征值 $E_n[R(t)]$ 的简并本征函数可选为群 G 的 D_n 维不可约表示 $\Gamma^{[n]}$ 的标准基 $|n\alpha[R(t)]\rangle$ $(\alpha=1,2,\cdots,D_n)$．以下对以 τ 为自变量的函数 $f=f(\tau)$ 记．$f'=f(\tau')$，$\dot{f}(\tau)=\frac{d}{d\tau}f(\tau)$，$|n\dot{\alpha}(f)\rangle=\frac{d}{d\tau}|n\alpha(f)\rangle(\tau=t,s,\cdots)$．

在以 $\left\{\exp\left[(1/i\hbar)\int_{t_0}^{t}E_n[R']dt'\right]|n.\alpha[R]\rangle,\ n=1,2,\cdots;\ \alpha=1,2,\cdots,D_n\right\}$ 为基的 Schrödinger 表象中[7,8]，Schrödinger 方程 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle=\hat{H}[R]|\phi(t)\rangle$ 的解可设为

$$\left|\phi(t)\right\rangle=\sum_n\sum_{\alpha=1}^{D_n}C_{n\alpha}(t)\cdot\exp\left[(1/i\hbar)\int_{t_0}^{t}E_n[R']dt'\right]\left|n\alpha[R]\right\rangle, \tag{1}$$

其系数 $C_{n\alpha}(t)$ 满足微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{C}_{n\alpha}(t)&+\sum_{\alpha'=1}^{D_n}\langle n\alpha[R]|n\dot{\alpha}'[R]\rangle C_{n\alpha'}(t)\\&=-\sum_{n'\neq n}\exp\left[(i/\hbar)\int_{t_0}^{t}[E_n[R']-E_{n'}[R']]dt'\right]\\&\quad\cdot\sum_{\alpha'=1}^{D_n}\langle n\alpha[R]|n'\dot{\alpha}'[R]\rangle C_{n'\alpha'}(t).\end{aligned} \tag{2}$$

为了逐级求解(2)，我们引入绝热微扰参量 $\varepsilon=\frac{1}{T}$（T 是体系的特征时间，如参数 $R(t)$ 的周期）并定义 $S=t/T$，$b_{n\alpha}(s)=C_{n\alpha}(ST)$，$Q(s)=R(TS)$；

$$b_n(s)=\begin{bmatrix}b_{n1}(s)\\b_{n2}(s)\\\vdots\\b_{nD_n}(s)\end{bmatrix},\quad \tilde{A}(nn',s)=\begin{bmatrix}\langle n1[Q]|n\dot{j}[Q]\rangle,\cdots\cdots,\langle n1[Q]|n\dot{D}_n[Q]\rangle\\\langle n2[Q]|n\dot{j}[Q]\rangle,\cdots\cdots,\langle n2[Q]|n\dot{D}_n[Q]\rangle\\\cdots\cdots\cdots\cdots,\cdots\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots\\\langle nD_{n'}[Q]|n\dot{i}[Q]\rangle,\cdots\cdots,\langle nD_{n'}[Q]|n\dot{D}_{n'}[Q]\rangle\end{bmatrix} \tag{3}$$

这里 S 是无量纲的标度时间，$b_n(s)$ D_n 维列矢量，$\tilde{A}(n,n',s)$ 是 $D_n\times D_{n'}$ 矩阵．这时，方程组(2)可写为矩阵形式的积分方程：

$$\begin{aligned}b_n(s)-b_n(s_0)&+\int_{s_0}^{s}\tilde{A}(n,n,s')b_n(s')ds'\\&=-\sum_{n'\neq n}\int_{s_0}^{s}e^{iT\alpha_{nn'}(s',s_0)}\tilde{A}(n,n',s')b_{n'}(s')ds'.\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\alpha_{nn'}(s,s_0)=(1/\hbar)\int_{s_0}^{s}(E_n[Q']-E_{n'}[Q'])ds'$．

现在我们作高级绝热近似．对方程 (4) 右端作逐次分部积分得到一个右端为 ε 级数的积分方程，然后对这个方程两边微分得

$$\begin{aligned}\dot{b}_n(s)+A(n,n,s)b_n(s)=&-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n'\neq n}\varepsilon^{K+1}\frac{d}{dS}\left\{\exp[iT\alpha_{nn'}(s)]\right.\\&\left.\cdot\left[\frac{i}{\dot{\alpha}_{nn'}(s,s_0)}\frac{d}{dS}\right]^K\cdot\left[\frac{\tilde{A}(n,n's)b_{n'}(s)}{i\dot{\alpha}_{nn'}(s,s_0)}\right]\right\}\end{aligned} \tag{5}$$

缓变情况意味着方程(5)右端是小量 ε 的收敛级数，令

$$b_n(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{K'}b_n^{[K']}(s)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{K'}\cdot(b_{n1}^{[K']}(s),b_{n2}^{[K']}(s),\cdots,b_{nD_n}^{[K']}(s))^T \tag{6}$$

(T 代表转置)，并代入(5)，比较得到的级数方程两边 ε 的同幂项系数得

$$\dot{b}_n^{[0]}(s)+\widetilde{A}(n,n,s)b_n^{[1]}(s)=0, \tag{7-1}$$

$$\dot{b}_n^{[K]}(s)+\widetilde{A}(n,n,s)b_n^{[K]}(s)=-\sum_{l=0}^{K-1}\sum_{n'\neq n}\frac{d}{dS}\left\{e^{iT\cdot\alpha_{nn'}(s,s_0)}\right.$$

$$\left.\cdot\left[\frac{i}{\dot{\alpha}_{nn'}(s,s_0)}\cdot\frac{d}{dS}\right]^{K-l-1}\cdot\left[\frac{\widetilde{A}(n,n',s)b_{n'}^{[l]}(s)}{i\dot{\alpha}_{nn'}(s,s_0)}\right]\right\}\equiv F_n^{[K]}(s),\quad K\geqslant 1, \tag{7-2}$$

上述方程就是高级绝热近似方程．其零阶近似方程(7-1)的解可形式地写为编序积分

$$b_n^{[0]}(s)=\widetilde{K}_n(s,s_0)b_n^{[0]}(s_0), \tag{8}$$

$$\widetilde{K}_n(s,s_0)=\mathscr{T}\cdot\exp\left[-\int_{s_0}^{s}\widetilde{A}(n,n,\tau)d\tau\right]. \tag{9}$$

再注意到 $F_n^{[K]}(s)$ 只涉及到 $b_n^{[0]}(s)$，$b_n^{[1]}(s),\cdots,b_n^{[K-1]}(s)$ $(n=1,2,\cdots)$，只要求出零阶解(9)，便可逐级求解(7-2)：

$$b_n^{[K]}(s)=\int_{s_0}^{s}\widetilde{K}_n(s,\tau)F_n^{[K]}(\tau)d\tau \tag{10}$$

虽然在一般的问题中，计算编序积分 $\widetilde{K}_n(s,s_0)$ 是相当困难的，但在本文所涉及的核四极共振问题中，大多数情况下 $\widetilde{K}_n(s,s_0)$ 是可以明显解出的，高阶绝热近似可随之作出．

三、诱导规范结构和绝热定理

现在讨论绝热极限 $\varepsilon\to 0$ 下简并量子态的演化．由(7-2)知绝热条件 $T\to\infty$ 或 $\varepsilon\to 0$ 的具体含义是

$$\left|\frac{\hbar\langle n\alpha[R]|m\dot{\beta}[R]\rangle}{E_n[R]-E_m[R]}\right|=\frac{1}{T}\cdot\left|\frac{\hbar\langle n\alpha[Q]|m\dot{\beta}[Q]\rangle}{E_n[Q]-E_m[Q]}\right|\ll 1 \tag{11}$$

在这个条件下，只取零阶近似解(8)．

如果 $s=s_0$ 时，体系的初始状态 $|\phi(s_0)\rangle$ 处于 Hilbert 空间 $\mathscr{H}=\sum_n\oplus V_{(s_0)}^{[n]}$ 的一个简并子空间 $V_{(s_0)}^{[n]}$：$\{|n\alpha[Q(s_0)]\rangle,|\alpha=1,2,\cdots,D_n\}$中，即 $|\phi(s_0)\rangle=\sum_{\alpha=1}^{D_n}b_{n\alpha'}|n\alpha\cdot[Q(s_0)]\rangle$．则方程(7-1)的初始条件为 $b_K^{[0]}(s_0)=\delta_{Kn}b_n(s_0)$ 由此得：$b_K^{[0]}(s)=\delta_{Kn}\widetilde{K}_n(s,s_0)\cdot b_n^{[0]}(s_0)$．这个结果给出了简并情况下的量子绝热定理：在体系参数变化足够缓慢使(11)满足的情况下，若体系初态 $|\phi(s_0)\rangle\in V^{[n]}(s_0)$，则 $|\phi(s)\rangle\equiv|\phi(Ts)\rangle\in V^{[n]}(s)$．与非简并情况的 Berry 相因子讨论一样，进一步的问题是：若 $|\phi(s_0)\rangle=|n\alpha(s_0)\rangle$，在绝热变化的 $\hat{H}[Q(s)]$ 驱动下，$t=sT$ 时刻体系的波函数是什么？这个答案由上述讨论直接给出 $t=sT$ 时刻的波函数

$$|\phi(s)\rangle=\sum_{n'}\sum_{\alpha'=1}^{D_n}b_{n'\alpha'}(s)\cdot\exp\left[(1/i\hbar)\int_{s_0}^{s}E_{n'}[Q']ds'\right]|n'\alpha'[Q]\rangle$$

$$= \sum_{n'} \sum_{\alpha'=1}^{D_{n'}} \delta_{n'n} [\tilde{K}_n(s,s_0)]_{\alpha'\alpha} \exp\left[(1/i\hbar)\int_{s_0}^{s} E_{n'}[Q']ds'\right] \cdot |n'\alpha'[Q']\rangle$$

$$= \sum_{\alpha'=1}^{D_n} [\tilde{K}_n(s,s_0)]_{\alpha'\alpha} \exp\left[(1/i\hbar)\int_{s_0}^{s} E_n[Q']ds'\right] |n\alpha'[Q']\rangle. \tag{12}$$

(12)中的 $D_n \times D_n$ 矩阵 $\tilde{K}_n(s, s_0)$ 就是所谓的非阿贝尔 Berry 相因子 (Non-Abelian Berry's Phase). 相应的非阿贝尔诱导规范势是N维参数流形 μ : $\{R = (R_1, R_2, \cdots, R_N)\}$ 的矩阵1-形式 $\mathscr{A}(n, Q)$:

$$\mathscr{A}_{(n,Q)\alpha\beta} = \langle n\alpha[Q]|\tilde{d}|n\beta[Q]\rangle \tag{13}$$

$\tilde{d}$ 是 μ 上的外微分算子，$\tilde{K}_n(s, s_0)$ 可写为 1-形式的编序积分: $\tilde{K}_n(s,s_0) = \mathscr{T} \cdot \exp \cdot \left[-\int_{Q(s)} \mathscr{A}(n, Q)\right]$，这种坐标无关的写法表明，$\tilde{K}_n(s, s_0)$ 只与参数曲线 $Q(s)$ 的形状有关，与 $Q(s)$ 的参数化方式-$\hat{H}[Q(s)]$ 变化的动力学细节无关.

与 $\mathscr{A}(n, Q)$ 相应的诱导规范场强 2-形式是

$$\mathscr{F}(n,Q) = \tilde{d}\mathscr{A}(n,Q) + \mathscr{A}(n,Q)\wedge\mathscr{A}(n,Q). \tag{14}$$

当 $V^{[n]}_{(s)}$ 基的选择差一个 $D_n \times D_n$ 么正变换 $U_{(Q)}$ 时,

$$|n\alpha[Q]\rangle \to |n\alpha[Q]\rangle' = \sum_{\beta} U_{(Q)\beta\alpha}|n\beta[Q]\rangle; \tag{15}$$

它使得 $\mathscr{A}(n,Q)$ 经历一个规范变换，$\mathscr{F}(n,Q)$ 按二阶张量方式变换，即

$$\begin{aligned} &\mathscr{A}(n,Q) \to \mathscr{A}'(n,Q) = U^{+}(Q)\mathscr{A}(n,Q)U^{+}(Q) + U^{+}(Q)\tilde{d}U(Q); \\ &\mathscr{F}(n,Q) \to \mathscr{F}'(n,Q) - U^{+}(Q)\mathscr{F}(n,Q)U(Q) \end{aligned} \tag{16}$$

可见，Willson 圈 $W_c = \mathrm{Tr}\left\{\mathscr{T} \cdot \exp\left[-\int_c \mathscr{A}(n,Q)\right]\right\}$ 和诱导拉氏量 $\mathscr{L} = \frac{1}{4}\ \mathrm{Tr} \cdot (\mathscr{F}(n,Q)_{\mu\nu}\mathscr{F}(n,Q)^{\mu\nu})$ 是规范变换(15)的不变量. 由上述讨论看出，当量子力学体系的参数绝热变化时，它的演化中会出现一个参数流形 μ 的 $U(D_n)$ 规范场结构.

以下我们将应用上述一般讨论，分析核四极共振中的非阿贝尔诱导规范结构和非绝热效应.

四、核四极共振的 Berry 相因子

Zee 在[12]中分析了 Tycko 验证 Berry 相的核四极共振实验[2] 及其非阿贝尔诱导规范结构. 本书将在上节的框架中进一步计算核四极共振中的非阿贝尔 Berry 相因子. 以下取 $\hbar = 1$.

核四极共振的有效哈密顿量是[12]

$$\hat{H}(s) \equiv \hat{H}[\boldsymbol{n}] = \omega_0(\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{J}})^2 \tag{17}$$

ω_0 是耦合常数，$\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{n}(s) = (\sin\alpha(s) \cdot \cos\beta(s), \sin\alpha(s) \cdot \sin\beta(s), \cos\alpha(s))$ 是四极核的主轴. 由角动量理论马上得到 $\hat{H}(s)$ 的瞬时本征函数和相应的本征值

$$|J, \pm M(s)\rangle = |J, \pm M[\alpha(s), \beta(s)]\rangle = e^{-i\hat{J}_z\beta(s)} \cdot e^{-i\hat{J}_y\alpha(s)} \cdot |JM\rangle, \tag{18}$$

$$E_M = \omega_0 M^2,\ \ M = J, J-1, \cdots, \frac{1}{2} \quad 或0.$$

$|JM\rangle$ 是标准角动量基. 对应于 E_M 的二度简并态 $|J,\pm M(s)\rangle$ 的(1)的展开系数为 $b_{M}\pm(s)$, 且记 $b_M(s)=(b_M+(s),\ b_M-(s))^T$. 按 $\tilde{A}(n,n',s)$ 定义, 由(18)得到非零的 $\tilde{A}(n,n',s)$:

$$\tilde{A}(M,M,s)=\mathrm{diag}\cdot[-iM\dot{\beta}(s)\cos\alpha(s),\ iM\dot{\beta}(s)\cos\alpha(s)],\ \left(M\neq\frac{1}{2}\right), \tag{19-1}$$

$$\tilde{A}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ s\right)=\begin{bmatrix} -\frac{i}{2}\dot{\beta}(s)\cdot\cos\alpha(s), & \alpha+\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \alpha-\left(\frac{1}{2}\right), & \frac{i}{2}\dot{\beta}(s)\cdot\cos\alpha(s)\end{bmatrix}, \tag{19-2}$$

$$\tilde{A}(M,M+1,s)=\mathrm{diag}\cdot[\alpha-(M+1),\ \alpha+(-(M+1))], \tag{19-3}$$

$$\tilde{A}(M,M-1,s)=\mathrm{diag}\cdot[\alpha+(M-1),\ \alpha-(-(M-1))]. \tag{19-4}$$

$\alpha\pm(M)\equiv\alpha\pm(M,s)=\frac{1}{2}\ [\mp\dot{\alpha}(s)+i\dot{\beta}(s)\sin\alpha(s)]\,[J(J+1)-M(M\pm1)]^{\frac{1}{2}}$. 由(19-1,2)得诱导规范势:

$$\mathscr{A}(M,\boldsymbol{n})=-iM\cos\alpha(s)\cdot\sigma_3 d\beta,\ \left(M\neq\frac{1}{2}\right);$$

$$\mathscr{A}\left(\frac{1}{2},\ \boldsymbol{n}\right)=-\frac{i}{2}\left\{\left[\cos\alpha(s)\cdot\sigma_3-\left(J+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha(s)\sigma_1\right]d\beta+\left(J+\frac{1}{2}\right)\sigma_2 d\alpha\right\} \tag{20}$$

其中 σ_i 是 Pauli 矩阵,(20)和文[12]的结果一样,由(19-1)知, $M\neq\frac{1}{2}$ 时, $\tilde{A}(M,Ms)$ 和 $\mathscr{A}(M,n)$ 是对角的,相应的非阿贝尔 Berry 相因子解析形式是

$$K_M(s,s_0)=\mathrm{diag}[\exp[-iM\Omega(s,s_0)],\ \exp[iM\Omega(s,s_0)]],$$
$$\Omega(s,\ s_0)=-\int_{s_0}^{s}\cos\alpha(s')\cdot\dot{\beta}(s')ds'. \tag{21}$$

在以下讨论中,我们均记 $\tilde{M}=-M$ 或 $M(|\tilde{M}|=M)$. 由于 $K_M(s,s_0)$ 是对角的,在绝热近似下, $|J\tilde{M}(s_0)\rangle$ 态只能演化为 $|J\tilde{M}(s)\rangle$ 态, 而不会出现 $|J\tilde{M}(s)\rangle$ 和 $|J-\tilde{M}(s)\rangle$ 的混合. 这种情况被 Wilczek 等称为"阿贝尔化" (Abelization)[14].

当 $M=\frac{1}{2}$ 时, $\tilde{A}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ s\right)$ 和 $\mathscr{A}\left(\frac{1}{2},n\right)$ 是非对角的,对于任意的 $\alpha(s)$, 编序积 $\mathscr{T}\cdot\exp\left[-\int\mathscr{A}\left(\frac{1}{2}\ \boldsymbol{n}\right)\right]$ 是不容易计算的. 但对于 $\alpha(s)=$ 常数 α 时,我们可最后算出这个编序积. 这时,

$$\tilde{A}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},s\right)=-\frac{i}{2}\dot{\beta}(s)\begin{bmatrix}\cos\alpha, & -\left(J+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha \\ -\left(J+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha, & -\cos\alpha\end{bmatrix} \tag{22}$$

通过精确求解 $\dot{b}_{\frac{1}{2}}(s)=-\tilde{A}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},s\right)b_{\frac{1}{2}}(s)$ 和 $b_{\frac{1}{2}}(s)=\tilde{K}_{\frac{1}{2}}(s,s_0)\cdot b_{\frac{1}{2}}(s_0)$ 可得到非阿贝尔 Berry 相因子:

$$\widetilde{K}_{\frac{1}{2}}(s,s_0)=\mathscr{T}\cdot\exp\left[-\int_{s_0}^{s}\widetilde{A}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\tau\right)d\tau\right]$$
$$=\frac{i}{\lambda}\begin{bmatrix}\cos\alpha\sin\Gamma(s_0,s)-i\lambda\cos\cdot\Gamma(s,s_0), & -\left(J+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha\sin\Gamma(s,s_0)\\ -\left(J+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha\sin\Gamma(s,s_0), & -\cos\alpha\cdot\sin\Gamma(s,s_0)-i\lambda\cos\Gamma(s,s_0)\end{bmatrix}\tag{23}$$

其中 $\lambda=\left[1+\left(J+\frac{3}{2}\right)\left(J-\frac{1}{2}\right)\sin^2\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$ 和 $\Gamma(s,s_0)=\frac{1}{2}\lambda[\beta(s)-\beta(s_0)]$.

由本节的讨论可以看出，开始极化于 $|J\widetilde{M}(s_0)\rangle$ 上的核，在缓变的哈密顿量 $\hat{H}[\boldsymbol{n}]$ 的驱动下，在 $t=T\cdot s$ 时刻将以确定几率到达 $|JM'(s)\rangle$ 态上．如果 $M\neq\frac{1}{2}$，$\widetilde{K}_M(s,s_0)$ 是对角的，只有 $|J\widetilde{M}(s_0)\rangle\rightarrow|J,M'=\widetilde{M}(s)\rangle$ 的跃迁；当 $M=\frac{1}{2}$ 时，$\widetilde{K}_M(s,s_0)$ 是非对角的，则不仅有 $\left|J,\frac{1}{2}(s_0)\right\rangle\rightarrow\left|J,M'=\frac{1}{2}(s)\right\rangle$ 的跃迁，而且有 $\left|J,\frac{1}{2}(s_0)\right\rangle\rightarrow\left|J,M'-\frac{1}{2}(s)\right\rangle$ 的跃迁．于是得到绝热情况下的选择定则．

$$(\mathrm{I})\quad \Delta\widetilde{M}=0\left(M\neq\frac{1}{2}\text{ 的阿贝尔化情况}\right)$$
$$\Delta\widetilde{M}=0,\ \mp\frac{1}{2}\left(\widetilde{M}=\pm\frac{1}{2}\text{ 的非阿贝尔情况}\right)$$

这个跃迁选择定则表明非阿贝尔 Berry 相因子在绝热情况下的物理效应．

五、核四极共振的非绝热效应

当四极矩核的主轴 $\boldsymbol{n}(s)$ 变化加快时，绝热条件 (10)：$|\sin\alpha(s)\cdot\dot{\beta}(s)/(T\omega_0)|\ll 1$ 被破坏，这就需要计算引起非绝热效应的最低阶近似——1-阶近似(或称准绝热近似)．在核四极共振问题中，一级近似方程(7)可具体写为

$$\dot{b}_n^{[1]}(s)+\widetilde{A}(n,n,s)b_n^{[1]}(s)=i\frac{d}{ds}\left\{\frac{\exp[-i(2n+1)(s-s_0)\omega T]\cdot\widetilde{A}_{(n,n+1,s)}}{-(2n+1)\omega_0}\cdot b_{n+1}^{[0]}(s)+\frac{\exp[i(2n-1)(s-s_0)\omega T]\cdot\widetilde{A}(n,n-1,s)}{(2n-1)\omega_0}\cdot b_{n-1}(s)\right\}\tag{24}$$

如果 s_0 时刻核的初态是 $|J\widetilde{M}(s_0)\rangle\left(\widetilde{M}\neq\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}\right)$ 体系演化将不涉及到与非阿贝尔诱导规范结构相关的态 $\left|J,\widetilde{M}=\pm\frac{1}{2}(s_0)\right\rangle$，当 $\widetilde{M}>0$ 时，方程 (24) 的初值条件是：$b_M^{[0]}(s_0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$b_{n'}^{[0]}(s_0)=0(n'\neq M)$ 和 $b_n^{[K]}(s_0)=0\ (K\geqslant 1)$．由零阶近似方程的解：

$$b_M^{[0]}(s)=\widetilde{K}_M(s,s_0)b_M^{[0]}(0)=e^{-iM\Omega(s,s_0)}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad b_{n'}^{[0]}(s)=0\quad n'\neq M$$

可得到准绝热(1-阶)近似方程

$$\dot{b}^{[1]}_{M+1}(s) + \tilde{A}(M+1, M+1, s) b^{[1]}_{M+1}(s)$$

$$= +i\frac{d}{ds}\left[\frac{\exp[i(2M+1)(s-s_0)\omega_0 T - iM\Omega(s,s_0)]}{(2M+1)\omega_0}\alpha + (M)\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad (25\text{-}1)$$

$$\dot{b}^{[1]}_{M-1}(s) + \tilde{A}(M-1, M-1, s) b^{[1]}_{M-1}(s)$$

$$= -i\frac{d}{ds}\left[\frac{\exp[-i(2M-1)(s-s_0)\omega_0 T - iM\Omega(s,s_0)]}{(2M-1)\omega_0}\alpha - (M)\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad (25\text{-}2)$$

的解析解

$$b^{[1]}_{M+1}(s) = i\int_{s_0}^{s} d\tau \cdot \exp[i(M+1)\Omega(s\tau)]\frac{d}{d\tau}$$

$$\cdot\left\{\frac{\exp[i(2M+1)\omega_0 T(s-s_0) - iM\Omega(\tau,s_0)]}{(2M+1)\omega_0}\cdot\alpha_{+(M,\tau)}\right\}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$b^{[1]}_{M-1}(s) = -i\int_{s_0}^{s} d\tau \exp[i(M-1)\Omega(s\tau)]\frac{d}{d\tau}$$

$$\cdot\left\{\frac{\exp[-i(2M-1)\omega_0 T(s-s_0) - iM\Omega(\tau,s_0)]}{(2M-1)\omega_0}\cdot\alpha_{-(M,\tau)}\right\}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad (26)$$

$b^{[1]}_{n}(s) = 0$, $n \neq M \pm 1$.

由此我们可以得到从 $|J,\tilde{M}(s_0)\rangle \to |J,\tilde{M}\pm 1(s)\rangle$ 跃迁的几率:

$$P(|J\tilde{M}(s_0)\rangle \to |J\tilde{M}\pm 1(s)\rangle) - \left|\frac{1}{T}\, b^{[1]}_{M\pm 1}(s)\right|^2 \quad (27)$$

在给定 $\boldsymbol{n}(s)$ 的变化方式时,可最后算出(27). 例如,当 $\dot{\beta}(s) = \omega T$, $\alpha(s)$ 为常数 α 时,

$$P(|J\tilde{M}(s_0)\rangle \to |J\tilde{M}\pm 1(s)\rangle) \cong \frac{4\cdot[J(J+1) - M(M\pm 1)]}{[2M\pm 1]^2}\sin^2\alpha\cdot\left[\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2$$

$$\cdot\sin^2\left\{\left[\omega\cos\alpha + \left(M\pm\frac{1}{2}\right)\omega_0\right]\cdot T\cdot(s-s_0)\right\} \quad (28)$$

上述讨论表明,绝热条件 $|\sin\alpha\omega/\omega_0| \ll 1$ 满足时,可忽略不同 $\tilde{M}\left(M \neq \frac{1}{2}\right)$ 间的跃迁,否则,在准绝热近似下有选择定则

$$\text{(II)}\quad \Delta\tilde{M} = M' - \tilde{M} = \pm 1\left(\tilde{M} \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\right).$$

现在讨论涉及到非阿贝尔诱导规范结构的核四极共振的非绝热效应. 以下分两种情况.

(i) s_0 时刻被极化于 $|\phi(s_0)\rangle = |J\cdot\tilde{M} = \frac{3}{2}(s_0)\rangle$ 状态的四极矩核的初始条件为

$b^{[0]}_{\frac{3}{2}}(s_0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $b^{[0]}_{n'}(s_0) = 0\ \left(n \neq \frac{3}{2}\right)$ 和 $b^{[l]}_{n}(s_0) = 0\ (l \geq 1)$, 则准绝热近似方程为

$$\dot{b}^{[1]}_{\frac{1}{2}}(s) + \tilde{A}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, s\right) b^{[1]}_{\frac{1}{2}}(s) = -i\frac{d}{ds}$$

$$\cdot\left[\frac{\exp[-2\omega_0 T(s-s_0)i]\cdot\alpha_-\left(\frac{3}{2}\right)}{2\omega_0}\cdot\tilde{A}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},s\right)b^{[0]}_{\frac{3}{2}}(s)\right],\tag{28-1}$$

$$\dot{b}^{[1]}_{\frac{5}{2}}(s)+\tilde{A}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},s\right)b^{[1]}_{\frac{5}{2}}(s)=i\frac{d}{ds}$$

$$\cdot\left[\frac{\exp[4\omega_0 T(s-s_0)i]\alpha_+\left(\frac{3}{2}\right)}{4\omega_0}\cdot\tilde{A}\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},s\right)b^{[0]}_{\frac{3}{2}}(s)\right].\tag{28-2}$$

其中 (28-2) 与非阿贝尔诱导规范结构无关，它的解由 (25-1) 给出，(28) 给出从 $\left|J\frac{3}{2}(s_0)\right\rangle\to\left|J\frac{5}{2}(s)\right\rangle$ 的跃迁几率；(28-1) 涉及到非阿贝尔诱导规范结构．由于 $\tilde{A}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},s\right)$ 和 $\tilde{K}_{\frac{1}{2}}(s,s_0)$ 是非对角的，虽然 $F^{[1]}_{\frac{1}{2}}(s)$ 取 $\begin{pmatrix}a\neq 0\\0\end{pmatrix}$ 形式，但由 (9) 给出的 $b^{[1]}_{\frac{1}{2}}(s)$ 却是 $\begin{pmatrix}a'\neq 0\\b'\neq 0\end{pmatrix}$ 形式．即，不仅存在 $\left|J\frac{3}{2}(s_0)\right\rangle\to\left|J,\frac{1}{2}(s)\right\rangle$ 的跃迁，而存在 $\left|J,\frac{3}{2}(s_0)\right\rangle\to\left|J,-\frac{1}{2}(s)\right\rangle$ 的跃迁．

(ii) s_0 时刻被极化于 $|\psi(s_0)\rangle=|J,\tilde{M}=\frac{1}{2}(s_0)\rangle$ 态上的非零初值条件是 $b^{[0]}_{\frac{1}{2}}(s_0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，一级近似方程为

$$b^{[1]}_{\frac{3}{2}}(s)+\tilde{A}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},s\right)b^{[1]}_{\frac{3}{2}}(s)=-i\frac{d}{ds}\left[\frac{\exp[2i\omega_0 T(s-s_0)]\alpha-\left(\frac{1}{2}\right)}{2\omega_0}\right.$$

$$\left.\cdot\tilde{A}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},s\right)b^{[0]}_{\frac{1}{2}}(s)\right].\tag{29}$$

由 $\tilde{K}_{\frac{1}{2}}(s,s_0)$ 是非对角的，$b^{[0]}_{\frac{1}{2}}(s)=\tilde{K}_{\frac{1}{2}}(s,s_0)b^{[0]}_{\frac{1}{2}}(s_0)$ 取 $\begin{pmatrix}a\neq 0\\b\neq 0\end{pmatrix}$ 形式，从而 (29) 给出的 $b^{[1]}_{\frac{3}{2}}(s)$ 取 $\begin{pmatrix}a'\neq 0\\b'\neq 0\end{pmatrix}$ 形式．即，不仅存在从 $\left|J\frac{1}{2}(s_0)\right\rangle\to\left|J\frac{3}{2}(s_0)\right\rangle$ 的跃迁，而且存在从 $\left|J,\frac{1}{2}(s_0)\right\rangle\to\left|J,-\frac{3}{2}(s_0)\right\rangle$ 的跃迁．

综述 (i) 和 (ii) 的定性分析，我们得到涉及到非阿贝尔诱导规范结构的选择定则：

$$\text{(III)}\quad\Delta\tilde{M}=\begin{cases}\pm 1,\pm 2,\ \text{当}\ \tilde{M}=\pm\frac{1}{2};\\[2ex]+1,-1,\mp 2,\ \text{当}\ \tilde{M}=\pm\frac{3}{2}.\end{cases}$$

这个选择定则为在实验上观察非阿贝尔诱导规范结构的物理效应提供了一种途径．通过求解方程 (28-1) 和 (29)，可以定量地给出选择定则 (III) 容许跃迁的几率．例如，当

$\dot{\beta}(s) = \omega T$，$\alpha(s) =$ 常数 α 时，方程(29)的解是

$$b^{[1]}_{\frac{3}{2}}(s) = \frac{T}{8\lambda}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\cdot \sin\alpha\cdot(\tilde{b}^{[1]}_{\frac{3}{2}+}(s),\quad \tilde{b}^{[1]}_{\frac{3}{2}-}(s))^T; \tag{30-1}$$

$$\tilde{b}^{[1]}_{\frac{3}{2}+}(s) = -\left[J(J+1)-\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{[\cos\alpha+\lambda]\cdot\left[\exp\left\{\frac{i}{2}[(\lambda-3\cos\alpha)\omega+4\omega_0]\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot T\cdot[s-s_0]\right\}-1\right]+[\lambda-\cos\alpha]\cdot\left[\exp\left\{\frac{i}{2}[(\lambda+3\cos\alpha)\omega\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-4\omega_0]\cdot T\cdot[s-s_0]\right\}-1\right]\right\}, \tag{30-2}$$

$$\tilde{b}^{[1]}_{\frac{3}{2}-}(s) = \left(J+\frac{1}{2}\right)\cdot\left[J(J+1)+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\sin\alpha\cdot\left\{\exp\left[\frac{i}{2}(\{\lambda+3\cos\alpha\}\omega\right.\right.$$
$$\left.+4\omega_0)\cdot T\cdot(s-s_0)\right]-\exp\left[-\frac{i}{2}(\{\lambda-3\cos\alpha\}\cdot\omega\right.$$
$$\left.\left.-4\omega_0)\cdot T\cdot(s-s_0)\right]\right\}, \tag{30-3}$$

保留到 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 的二阶项，(30-1,2,3)给出跃迁几率：

$$P\left(\left|J\frac{1}{2}(s_0)\right\rangle\to\left|J\frac{3}{2}(s)\right\rangle\right) = \left|\frac{1}{T}b^{[1]}_{\frac{3}{2}+}(s)\right|^2$$
$$= \frac{1}{64\lambda^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\sin^2\alpha\cdot\left[J(J+1)-\frac{3}{4}\right]\cdot\left\{(\cos^2\alpha+5\lambda^2)+(\cos^2\alpha-\lambda^2)\right.$$
$$\cdot\cos\left[\lambda\cdot\frac{\omega}{2}\cdot T(s-s_0)\right]-2\lambda[\cos\alpha+\lambda]\cdot\cos\left[\left(\frac{1}{2}(\lambda-3\cos\alpha)\omega-\omega_0\right)\right.$$
$$\left.\cdot T\cdot(s-s_0)\right]+2\lambda[\cos\alpha-\lambda]\cdot\cos\left[\left(\frac{1}{2}[\lambda+3\cos\alpha]\omega-\omega_0\right)\right.$$
$$\left.\left.\cdot T\cdot(s-s_0)\right]\right\}; \tag{31-1}$$

$$P\left(\left|J,\frac{1}{2}(s_0)\right\rangle\to\left|J-\frac{3}{2}(s)\right\rangle\right) = \left|\frac{1}{T}b^{[1]}_{\frac{3}{2}-}(s)\right|^2$$
$$= \frac{1}{16\lambda^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\sin^2\alpha\cdot\left[J(J+1)+\frac{3}{4}\right]\cdot\sin^2\left[\frac{1}{2}\lambda\omega T(s-s_0)\right] \tag{31-2}$$

作者感谢葛墨林教授、吴兆颜教授的讨论与帮助。

参考文献

[1] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A392**(1984), 45.
R. Jackiw, *Com. Atom. Mole, Phys.*, **21**(1988), 71, and therein

[2] R. Tycko, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 2281.
D. J. Richardson et. al. *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 2030.

[3] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A414**(1987), 47.

[4] N. Nakagawa, *Ann. Phys.*, **179**(1987), 145.

[5] C.-P. Sun, *Chinese Phys. Lett.*, **6**(1989), 97.

[6] N. Papanicolaou. J. Phys. France, 49(1988), 1493.

[7] C.-P. Sun, J. Phys. **A21**(1988), 1595.

[8] 孙昌璞，高能物理与核物理，**12**(1988)，352.

[9] C.-P. Sun, Phys. Rev. D 38(1988), 2908.
孙昌璞，高能物理与核物理，13(1989)，403.
[10] 孙昌璞，高能物理与核物理，**13**(1989)，109.
[11] F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 2111.
[12] A. Zee, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 1.
[13] J. Moody et. al., *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 161.
[14] J. Segert, *Ann. Phys.*, **179**(1987), 294.

HIGH-ORDER ADIABATIC APPROXIMATIONS FOR EVOLUTION OF DEGENERATE QUANTUM MECHANICAL SYSTEM AND NON-ABELIAN INDUCED GAUGE STRUCTURE

SUN CHANGPU
(*Northeast Normal University, Changchun*)

ABSTRACT

In this paper high-order adiabatic approximate method is proposed to study the evolution of degenerate quantum systums with slowly-changing parameters and varying symmetry. We not only prove the quantum adiabatic theorem for degenerate cases and discuss the corresponding non-abelian induced gauge structure, but also point out the non-adiabatic corrections resulting from higher-order approximations. With nuclear quadrupole resonance as an explicit example, we use this method to analyse observable effects of non-abelian Berry's phases in adiabatic and non-adiabatic experimental process.