

变形核的电荷密度分布

郑春开

(北京大学技术物理系)

摘 要

本文应用原子核的宏观模型提出了一种比较简单的计算变形核电荷密度的方法。具体计算了 ^{192}Os 、 ^{154}Gd 、 ^{152}Sm 、 ^{174}Yb 及 $^{144,148,150,152}\text{Sm}$ 等原子核的电荷密度分布。结果表明,宏观模型计算的结果能较好地与实验测量结果相符合。因此,只要根据变形核基态到各转动态跃迁几率或电多极矩的实验值,则可按本文方法,从理论上预言变形核的电荷密度分布。

一、引 言

原子核的电荷分布是原子核重要的基本性质之一,也是核结构研究中的一个重要问题。早期的液滴模型把原子核看成是密度均匀、有明确表面的带电液滴。显然,这种模型是过分地粗糙了。七十年代以来,利用高能电子与核的弹性散射实验,测量其散射微分截面,就可以相当精确地确定球形核的电荷密度分布,并获得了不少有关球形核的电荷分布知识^[1-4]。近来,在电子散射实验中,同时测量弹性散射和基态(0^+)到各转动态(2^+ 、 4^+ 、 6^+)跃迁的非弹性散射微分截面,可以确定变形核的电荷分布^[5-9]。

在理论上,原子核的电荷分布,可以假设某种形式的平均场^[10],或采用 Hartree-Fock 方法进行计算^[5,11,12,13],所得结果与实验测量的基本相符,但一般说来计算是比较复杂的。我们曾根据原子核的宏观模型,比较简便地计算了球形核的电荷分布,只选取一套确定的参数,可在相应大范围内使计算结果与实验能满意地符合^[14]。本文把原子核的宏观模型应用于变形核,提出了一种比较简单的计算电荷密度的方法,并对 ^{192}Os 、 ^{154}Gd 、 ^{152}Sm 、 ^{174}Yb 及 $^{144,148,150,152}\text{Sm}$ 等原子核作了具体计算,所得结果能与实验测量较好地符合。

二、高能电子散射与原子核的电荷分布

为了与实验结果进行比较,本节只简要介绍一下对实验数据的理论分析。电子散射实验的分析应该采用扭曲波玻恩近似(DWBA)方法,但为了简单起见,这里只用平面波玻恩近似(PWBA)方法的结果来说明,比较全面的讨论可参看有关文献[15,16]。

在 PWBA 中,电子散射使核从基态(自旋为 J_i)到激发态(自旋为 J_f)的 α' 级跃迁,其微分截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi\sigma_{\text{Mott}}\eta \left[|F_i^z(q)|^2 + \left(\frac{1}{2} + \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) |F_i^T(q)|^2 \right], \quad (1)$$

式中 σ_{Mott} 称为 Mott 截面,它代表单位正点电荷对电子散射的截面, η 是反冲因子, q 是跃迁时的动量转移, 这些量都可由已知的电子散射实验的有关参量求得. $F_i^z(q)$ 与 $F_i^T(q)$ 分别为纵向与横向的形状因子,它包含了核结构的信息. 由于集体激发的运动速度比单粒子运动速度小得多,因而磁的与电流的贡献很小,即在式(1)中横向形状因子 $F_i^T(q)$ 的贡献可以忽略. 故在式(1)方括弧中只剩下纵向部分 $F_i^z(q)$ 的贡献,它是反映散射时的库仑作用,因而也称它为库仑形状因子. 通过贝塞尔变换,电荷跃迁密度与库仑形状因子的关系为

$$F_i^z(q) = \sqrt{\frac{2J_f + 1}{2J_i + 1}} \int \rho_l(r) j_l(qr) r^2 dr, \quad (2)$$

式中 $\rho_l(r)$ 是以勒让德多项式展开的 2^l 极电荷跃迁密度, j_l 是 l 阶球贝塞尔函数. 因此,只要在实验上测得电子与核的弹性散射及基态到各转动态跃迁的非弹性散射的微分截面(要求 q 在足够大的范围),则可从式(1)得到形状因子 $F_i^z(q)$,再经过式(2)的福氏变换或球贝塞尔函数展开的分析方法^[1,17,18],可以得到各级的跃迁电荷密度 $\rho_l(r)$.

只有在完全忽略核的转动与内部运动的耦合时,即假设集体转动并不影响核内电荷分布时,上述方法所得的电荷跃迁密度才会与核基态的电荷密度相同. 若满足这一近似条件,轴对称变形核的基态电荷密度可表示为

$$\rho(r) = \sum_{l=0,2,4,\dots} \rho_l(r) P_l(\cos\theta), \quad (3)$$

式中 $\rho_l(r)$ 就是实验上测定的电荷跃迁密度. 对于偶偶核的弹性散射,可以确定 $\rho_0(r)$ 分布,而 $\rho_2(r)$ 、 $\rho_4(r)$ 、 $\rho_6(r)$ 等则要通过 $0^+ \rightarrow 2^+$ 、 4^+ 、 6^+ 等非弹性散射微分截面确定.

跃迁电荷密度 $\rho_l(r)$ 与实验上可测量的几个积分量关系为

$$B(El) = [\sqrt{2l+1}] \int \rho_l(r) r^{l+2} dr]^2 \quad (4)$$

$$Q_l = 2 \int \rho_l(r) r^l P_l(\cos\theta) dV = \frac{8\pi}{2l+1} \int \rho_l(r) r^{l+2} dr \quad (5)$$

$$R_{lr} = \left[\int \rho_l(r) r^{l+4} dr / \int \rho_l(r) r^{l+2} dr \right]^{1/2} \quad (6)$$

式中 $B(El)$ 是由 $0^+ \rightarrow l^+$ 的电 α' 极跃迁几率, Q_l 是核基态的电 α' 极矩,这两个积分量不是独立的. R_{lr} 为跃迁半径,当 $l=0$ 时, R_{lr} 即为均方根电荷半径. 式(4)或(5)可作为跃迁电荷密度的归一化条件.

三、原子核的宏观模型与电荷密度分布

原子核的宏观模型^[14]假定原子核的能量表示为中子密度 ρ_N 、质子密度 ρ_Z 的泛函

$$\begin{aligned}
 E[\rho_N, \rho_Z] = & \int [-a_1 + a_3(\rho_N - \rho_Z)^2/\rho_0^2 + sa_3(\rho_N + \rho_Z - \rho_0)^2/\rho_0^2] \rho_0 dV \\
 & + \int [a_4 - a_6(\rho_N - \rho_Z)^2/\rho_0^2 - sa_6(\rho_N + \rho_Z - \rho_0)^2/\rho_0^2] \varphi \rho_0 dV \\
 & + \frac{e^2}{2} \iint \frac{\rho_Z(\mathbf{r}_1)\rho_Z(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dV_1 dV_2, \quad (7)
 \end{aligned}$$

式中 a_1, a_3, a_4, s 为可调参量, 已由拟合原子核质量的实验值确定, ρ_0 为参考密度, 取为与实验核物质分布相接近的 Fermi 型分布

$$\rho_0 = \frac{\rho_0}{4\pi a^3} \left[1 + \exp\left(\frac{r}{\lambda f(\theta)} - R_0\right) / a \right]^{-1}, \quad (8)$$

现取 a 为长度单位, 则上式简化为

$$\rho_0 = \frac{\rho_0}{4\pi} \left[1 + \exp\left(\frac{r}{\lambda f(\theta)} - R_0\right) \right]^{-1}. \quad (9)$$

对于轴对称及前后对称的变形核, 取

$$f(\theta) = 1 + \sum_{l=2,4,\dots} \alpha_l P_l(\cos \theta), \quad (10)$$

式中 $\alpha_l (l=2, 4, \dots)$ 为 α^l 极形变参量. 参考密度 ρ_0 的半密度面 (ρ_0 值降为中心密度一半时的等密度面) 方程

$$r = \lambda R_0 f(\theta), \quad (11)$$

λ 为保持等密度面内体积守恒而引入的参量,

$$\lambda = \left[\frac{1}{4\pi} \int f^3(\theta) d\Omega \right]^{-1/3}, \quad (12)$$

对于球形核, $\alpha_l = 0$, $f(\theta) = 1$, $\lambda = 1$, 此时 ρ_0 就是球对称的 Fermi 型分布. 常数 R_0 由归一化条件

$$\int \rho_0 dV = A \quad (13)$$

确定, 这里 A 为原子核的核子数. 由式(13)的积分可得

$$R_0^3 + \pi^2 R_0 = \frac{3A}{\rho_0}. \quad (14)$$

式(9)与通常所取的变形核 Fermi 型分布形式有些不同, 现取式(9)的形式, 可保证 $r = 0$ 处, ρ_0 是单值的. 式(7)中的因子 φ 选取为

$$\varphi = |\nabla \rho_0| / \rho_0, \quad (15)$$

显然, φ 只在 ρ_0 变化显著的弥散层内的值较大, 这样式(7)中的第二项积分的主要贡献是来自表面弥散层区域, 因此这一项相当于液滴模型的表面能, 式(7)中的第一项是体积能, 第三项为库仑能. 在体积能和表面能项中也包含了中子、质子不对称性 $(\rho_N - \rho_Z)^2$ 及核物质压缩 $(\rho_N + \rho_Z - \rho_0)^2$ 对能量的贡献.

能量泛函(7), 在限制条件

$$\int \rho_N dV = N, \quad \int \rho_Z dV = Z \quad (16)$$

下作变分,这里 N, Z 分别为核的中子数与质子数. 令 $\delta E = 0$, 则得能量极小时的方程

$$\left. \begin{aligned} s(\rho_N + \rho_Z - \rho_0) + (\rho_N - \rho_Z) &= \lambda_N \rho_0 \Phi \\ s(\rho_N + \rho_Z - \rho_0) - (\rho_N - \rho_Z) + \frac{e^2}{2a_3} \rho_0 \Phi \int \frac{\rho_Z(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV_1 &= \lambda_Z \rho_0 \Phi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中 $\Phi = 1/(1 - \gamma\varphi)$, $\gamma = a_6/a_3$, λ_Z 和 λ_N 是拉氏乘子. 在式(17)中消去 ρ_N , 再引入函数 F , 并令

$$\rho_Z = \frac{1}{2} \rho_0 (\Phi F + 1), \quad (18)$$

则可证明, 方程(17)中 ρ_Z, ρ_N 的解可转化为求如下方程及其边界条件 F 的解, F 的方程

$$\nabla^2 F - \frac{4\pi k^2}{t} \rho_0 (\Phi F + 1) = 0 \quad (19)$$

边界条件

$$\left. \begin{aligned} F \rightarrow \text{有限}, \quad r \rightarrow 0 \text{ 时} \\ F \rightarrow -\frac{2k^2 Z}{tr} + B - \frac{k^2}{t} \sum_{i \geq 2} \frac{Q_i P_i(\cos \theta)}{r^{i+1}} \quad r \rightarrow \infty \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中 $k^2 = e^2(1+s)t/(8a_3s)$, $B = [\lambda_Z(1+s) + \lambda_N(1-s)]/(2s)$ 是两个新的常数, Q_i 是与式(5)定义相同的电 a' 极矩, B 和 Q_i 在求解方程(19)时由边界条件(20)可以确定. 因此, 只要在满足边界条件(20), 求解方程(19), 求得函数 F , 代入式(18)即可得到变形核的电荷分布 ρ_Z , 从而还可以得到中子分布.

四、计算方法与结果

对于一个给定的核, 边界条件(20)完全确定. 将 F 用偶数阶勒让德多项式 $P_{2i}(\cos \theta)$ 展开

$$F = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^n f_i(r) P_{2i}(\cos \theta) \quad (21)$$

代入方程(19)可得 $(n+1)$ 个关于 $f_i(r)$ ($i=0, 1, \dots, n$) 耦合的联立二阶常微分方程组

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2i(2i+1)}{r^2} \right] f_i - (4i+1)k^2 \sum_{j=0}^n q_{ij}(r) f_j - (4i+1)k^2 r p_i(r) = 0, \quad (22)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} q_{ij}(r) &= \int_0^1 \frac{4\pi}{t} \rho_0 \Phi P_{2i}(x) P_{2j}(x) dx, \\ p_i(r) &= \int_0^1 \frac{4\pi}{t} \rho_0 P_{2i}(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

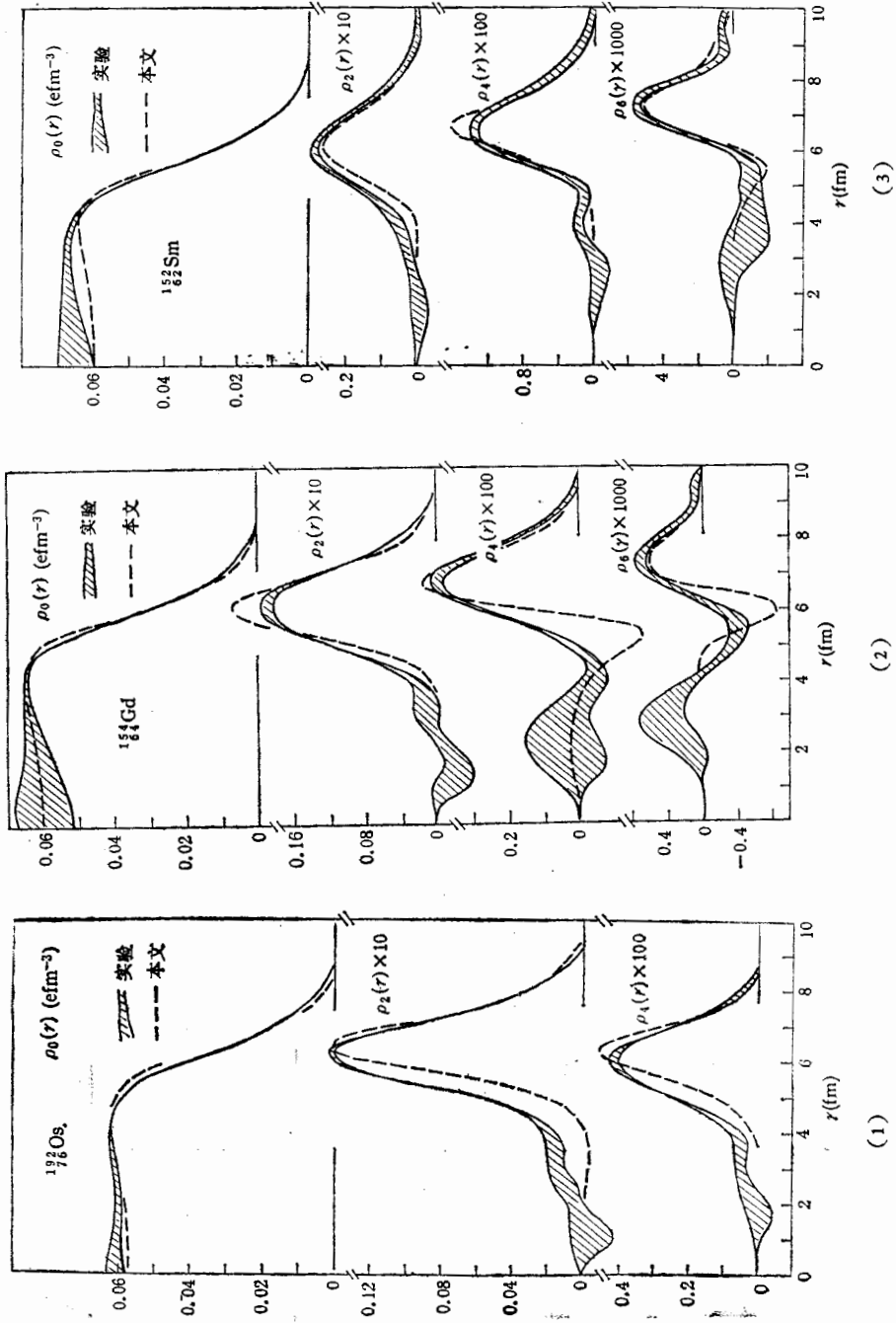
利用差分方法, 并根据边界条件(20)求解方程组(22)得 $f_i(r)$. 最后, 电荷密度分布表示为(ρ 下角标 Z 省略)

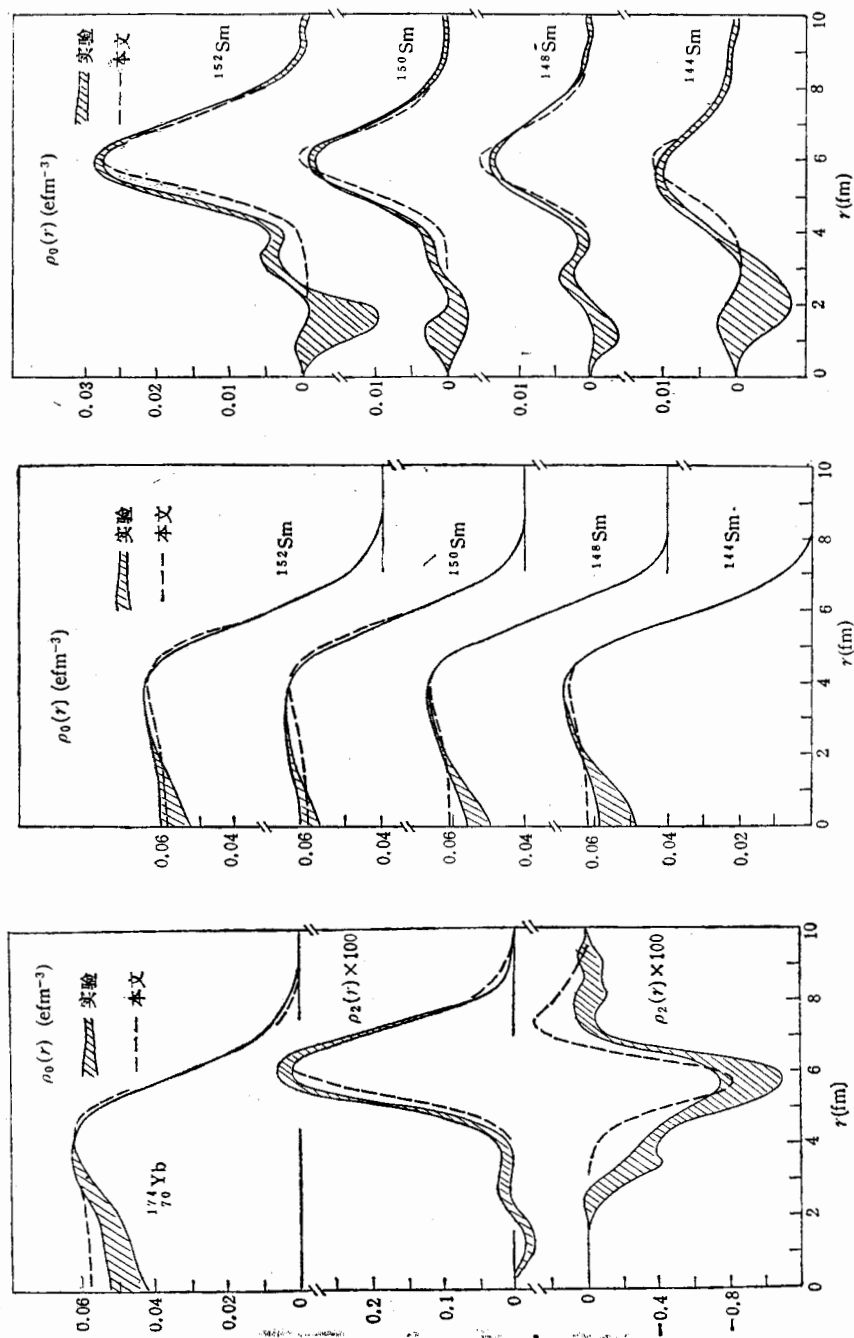
$$\rho(r, \theta) = \sum_{i=0, 2, \dots} \rho_i(r) P_i(\cos \theta), \quad (24)$$

表 1 选取参数、计算结果及与实验的比较

核	α_2	α_4	α_4	α_4	$B(E2)$ (e^2b^2)	$B(E4)$ (e^2b^4)	$B(E6)$ (e^2b^6)	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ (fm)	$R_{r(2)}$ (fm)	$R_{r(4)}$ (fm)	$R_{r(6)}$ (fm)	参考文献
$^{16}_8\text{O}$	0.0672	-0.0183	0	0	2.006 2.009(32)	0.0360 0.0365(42)		5.401 5.413(4)	7.23 6.95(6)	6.93 6.89(8)		[5]
$^{152}_{64}\text{Gd}$	0.1196	0.0124	-0.0012	0.147	3.87 3.87(6)	0.146 0.146(12)	0.0033 0.0034(7)	5.085 5.122(4)	6.954 6.918(4)	8.06 7.68(6)	9.29 8.20(10)	[6]
$^{152}_{64}\text{Sm}$	0.1483	0.0742	0.016	1.92	6.80 6.80(97)	1.93 1.93(46)	0.35 0.35(20)	5.097 5.013(16)	7.16 6.75(23)	7.97 7.83(27)	8.86 8.66(43)	[7] 表 IV(c,c)
$^{170}_{70}\text{Yb}$	0.1675	-0.0162	-0.0178	0.0675 0.0671	10.334 10.34	0.0675 0.0671	0.0489 0.0484	5.310	7.19	9.50	7.82	[9] [19]表 IV.(e,e')
$^{148}_{62}\text{Sm}$	0.0555	0	0		0.653 0.653			4.960 4.947(9)	6.72 6.12			[8]
$^{148}_{62}\text{Sm}$	0.0783	0	0		1.38 1.38			5.001 5.002(6)	6.79 6.34			[8]
$^{152}_{62}\text{Sm}$	0.1061	0	0		2.65 2.65			5.032 5.045(6)	6.85 6.70			[8]
$^{152}_{62}\text{Sm}$	0.1565	0	0		6.84 6.84			5.093 5.093(6)	7.06 6.80			[8]

注: 每一个核的第一行为本文计算结果, 第二行为所引参考文献的实验值, 其中 $B(EI)$ 均按式(4)定义。





(4)

(5)

(6)

图 本文计算的变形核密度分布与实验曲线的比较, 实验曲线的引文见表 1 所列的参考文献

各极电荷密度

$$\rho_l(r) = \int_0^1 \rho(r, \theta) P_l(x) dx / (2l + 1),$$

由式(18) $P_z = \rho(r, \theta)$ 及式(21)代入上式得

$$\rho_l(r) = \frac{(2l+1)\epsilon}{8\pi} \left[\frac{1}{r} \sum_{i=0}^n f_i(r) q_{il/2}(r) + p_{l/2}(r) \right]. \quad (25)$$

$$(l = 0, 2, 4, \dots)$$

因此,只要给定参考密度(9)中所含参量及 $k^2, \gamma = a_6/a_3$ 的值,则可由方程组(22)求解得 $f_i(r)$,从而各极电荷密度 $\rho_l(r)$ 完全由式(25)确定.

对于球形核,求电荷密度时只涉及到 ϵ, a, k^2 和 γ 四个参量. 在文献[14]中,这些参量已由全面拟合球形核的电荷分布及其有关的平均性质的实验数据确定, $k^2 = 0.011859$, $\gamma = 0.55$, $\epsilon = 0.3$, $a = 0.5220$ (fm). 对于变形核,这四个参量完全固定,只增加式(10)中的形变参量 α_i . 在具体求解时,我们只取 α_2, α_4 和 α_6 ,这三个参量是可调的. 每选取一组形变参量 α_i 值,求解方程(22),得到电荷分布(25)及由式(4)定义的跃迁几率 $B(EI)$. 可以调整参量 α_i 的值,重复求解,直至所得的 $B(EI)$ (或 Q_i) 值与这个核的实验值相符时,则这时的电荷分布 $\rho_l(r)$ 就是宏观模型的理论结果.

本文应用如上方法,计算了 ^{152}Os 、 ^{154}Gd 、 ^{152}Sm 、 ^{174}Yb 及 $^{144,146,150,152}\text{Sm}$ 等原子核的电荷分布,计算时选取的参量 α_i , 计算结果及其与实验的比较列在表1及画在图1—6中.

五、讨 论

由计算所得的图1—6的结果表明,宏观模型计算的电荷密度与实验测量的结果能满意地符合,图中计算曲线能较好地再现实验结果. 因此,只要从有关实验获得变形核的电多极跃迁几率(或电多极矩值),则可按照本文提出的宏观模型的方法预言变形核的电荷分布. 本文计算的 ^{174}Yb 核就是一个很好的例证. 因为文献[9]中只给出 ^{174}Yb 核的电荷分布实验曲线,而未给出相应的跃迁几率 $B(EI)$ 值. 在计算这个核的电荷分布时,所依据的 $B(EI)$ 值是采用文献[19]给出的电多极矩的实验值换算而得,最后电荷密度计算的结果与实验符合很好(见图4).

本文提出的方法,计算简便,可调参量少(只有2—3个形变参量),所编的计算程序简短,实际计算所需的机时很少,因此是一个计算变形核电荷分布的很有效的方法. 如有更多一些变形核电荷分布实验结果得到这一计算方法的验证,则宏观模型计算电荷分布的方法就更具有可靠性,这一点还有待于今后更多实验结果的检验.

最后还须说明,按照 $B(EI)$ 的归一化条件(4),不能完全确定 $\rho_l(r)$ 的符号. 如按照式(5)电多极矩 Q_l 值进行归一化,则可完全确定 $\rho_l(r)$ 的符号. 如图1中的 $\rho_l(r)$, 实验曲线是按式(5)归一的,但由于 Q_4 为负值,实际电荷分布 $\rho_l(r)$ 应与图1中的差一负号. 为便于比较,本文计算的 $\rho_l(r)$ 乘一负号后画在图1中.

本文计算费用,由核工业总公司的核数据中心资助,特此致谢。作者对胡济民教授对本项工作的关心及有益的讨论表示感谢。

参 考 文 献

- [1] B. Dreher et al., *Nucl. Phys.*, **A235**(1974), 219.
- [2] H. D. Wohlfahrt et al., *Phys. Rev.*, **C22**(1980), 264.
- [3] I. Sick, *Nucl. Phys.*, **A354**(1981), 37c.
- [4] C. W. de Jager, *Atomic Data and Nuclear Data Table*, **14**(1974), 479.
- [5] W. Reuter et al., *Phys. Rev.*, **C30**(1984), 1465.
- [6] F. W. Hersman et al., *Phys. Rev.*, **C33**(1986), 1905.
- [7] L. S. Cardman et al., *Phys. Rev.*, **C18**(1978), 1388.
- [8] M. A. Moinester et al., *Phys. Rev.*, **C24**(1981), 80.
- [9] W. Bertozzi, *Nucl. Phys.*, **A374**(1982), 109c.
- [10] F. Malaguti et al., Nuclear Charge Distributions, Oxford University, Nuclear Physics Laboratory, Ref; 89/81.
- [11] H. S. Koher, *Nuclear Phys.*, **A258**(1976), 301.
- [12] J. W. Negele et al., *Phys. Rev.*, **C15**(1977), 1499.
- [13] D. Vautherin, *Phys. Rev.*, **C7**(1973), 296.
- [14] 胡济民,郑春开,原子核物理, **7**(1985), 1.
- [15] de Forest et al., *Adv. Phys.*, **15**(1966), 1.
- [16] W. Donnelly et al., *Annu. Rev. Nucl. Sci.*, **25**(1975), 329.
- [17] J. Heisenberg et al., *Phys. Rev.*, **C25**(1982), 2292.
- [18] J. Heisenberg, *Adv. Nucl. Phys.*, **12**(1981), 61.
- [19] T. Ichihara et al., *Phys. Rev.*, **C29**(1984), 1228.

CHARGE DENSITY DISTRIBUTIONS OF DEFORMED NUCLEI

ZHENG CHUNKAI

(Department of Technical Physics, Peking University)

ABSTRACT

A simple calculation method for charge density distributions of deformed nuclei by using macroscopic model has been proposed. The calculations of charge density distributions for ^{192}Os , ^{154}Gd , ^{152}Sm , ^{174}Yb and $^{144,148,150,152}\text{Sm}$ nuclei have been performed. The results show that the calculated charge densities are in good agreement with experiments. Consequently, on the base of experimental data of the transition probabilities for ground state to 2^+ , 4^+ , 6^+ rotational states or its electric multipole moments, The charge density distributions of deformed nuclei can be predicted theoretically by this method.