第16卷 第11期 高能物理与核物理 Vol. 16, No. 11
1992年11月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1992

多体关联 Green 函数动力学*
II. 等时极限

左 维 王顺金
（兰州大学现代物理系，730001）

摘 要

对多体关联 Green 函数的基本动力学方程组作等时极限，得到了密度矩阵形式的多体关联动力学方程组，并证明了各种不同时序的等时极限间的等价性。

一、引 言

推广密度矩阵形式的多体关联动力学理论[1]中的思想和方法，从多体 Green 函数的运动方程出发，通过对多体 Green 函数进行关联分离

$$
\begin{aligned}
G^{(n)}(1,\cdots n;1'\cdots n') &= G_c^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n') \\
&+ \underset{\{1'\cdots n'\}}{\mathrm{A}_p}\ \underset{\left\{\substack{2\cdots n\\ 2'\cdots n'}\right\}}{\mathrm{S}_p}\ \sum_{k=1}^{n-1} G_c^{(k)}(1\cdots k;1'\cdots k')G^{(n-k)}((k+1)\cdots n;(k+1)'\cdots n'),
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

可得多体关联 Green 函数的基本动力学方程组[2]

$$
\begin{aligned}
\left[i\frac{\partial}{\partial t_1} - t(1)\right] G(1;1') &= \delta^{(4)}(1,1') \\
&- i\int d2V(1,2)[G(1;1')G(2;2^+) - G(1;2^+)G(2;1') \\
&+ G_c^{(2)}(1,2;1',2^+)],
\end{aligned}
\tag{1.2a}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[i\frac{\partial}{\partial t_j} - t(j)\right] G_c^{(n)} = -i \Bigg[&\underset{(n+1)'=(n+1)^+}{\mathrm{Tr}} V(j,n+1) \underset{(n+1)}{AS} \\
&\times \sum\sum\sum_{k\geqslant l\geqslant m=0} G_c^{(k)}G_c^{(l)}G_c^{(m)}\delta_{k+l+m,n+1}\Bigg]_L. \quad (n\geqslant 2, j=1,\cdots,n)
\end{aligned}
\tag{1.2b}
$$

及其对应的共轭方程组能为描述多体系统提供一种系统的非微扰计算方法。

一个推广的更一般的理论应把特殊的理论作为极限情况包含于其中。因而，多体关联 Green 函数理论应包含多体关联密度矩阵理论。本篇的目的在于显示上述论点，证明多体关联 Green 函数的运动方程在等时极限下导致多体关联密度矩阵的动力学方程，这样，既在极限情况下检验了上篇[2]所得结果的正确性，同时又展示了 Green 函数形式的

本文1991年9月21日收到。
* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助。

多体关联动力学理论是密度矩阵形式的相应理论的推广.

二、多体关联 Green 函数的运动方程的正规等时极限——密度矩阵形式的多体关联动力学

遵照通常的程序，n 体 Green 函数在下述我们称之为正规等时极限下导致 n 体密度矩阵

$$[i^n G^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n')]_{\mathrm{NETL}} = (-)^n \rho_n(1\cdots n;1'\cdots n';t), \tag{2.1}$$

其中 NETL 表示正规等时极限 (normal equal time limit)，定义为按时序

$$t_1' > t_2' > \cdots > t_n' > t_n > \cdots > t_1$$

取等时极限. 相应地

$$[i^n G_c^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n')]_{\mathrm{NETL}} = (-)^n c_n(1\cdots n;1'\cdots n';t). \tag{2.2}$$

n 体 Green 函数的其它等时极限与(2.1)中的正规等时极限相比，由于场算符改变次序时，应考虑反对易子的贡献，将产生一些额外的项目. 这些项目是不连接的，由一些 δ 函数与低阶密度矩阵的乘积构成. 为了更清楚地显示上述论点，写出一体 Green 函数的两种不同的等时极限

$$[iG(1;1')]_{t_1'=t_1^+=t} = -\rho(1;1';t), \tag{2.3a}$$

$$[iG(1;1')]_{t_1'=t_1^-=t} = \delta^{(3)}(1,1') - \rho(1;1';t). \tag{2.3b}$$

在附录中，将证明一个有趣的结论：多体关联 Green 函数的任何等时极限都导致同一个多体关联密度矩阵，即

$$[i^n G_c^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n')]_{\text{any equal time limit}} = (-)^n c_n(1\cdots n;1'\cdots n';t). \quad (n \geqslant 2) \tag{2.4}$$

上述结果从直观上是很好理解的，因为 $G^{(n)}$ 的不同的等时极限的差别仅在于不连接项不同，故它们唯一的连接项 $G_c^{(n)}$ 在不同的等时极限下是相同的（即等时极限保持图形的连接性不变）.

下面对多体关联 Green 函数的运动方程取正规等时极限. 对于 $n=1$，由 (1.2a) 得到

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\rho(1;1';t) &= [t(1) - t(1')]\rho(1;1';t) \\ &+ \operatorname*{tr}_{(2'=2)}[v(1,2) - v(1',2')][\rho(1;1';t)\rho(2;2';t) \\ &- \rho(1;2';t)\rho(2;1';t) + c_2(1,2;1',2';t)]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

这里引进的三维求迹运算 $\operatorname*{tr}_{(n+1)'=(n+1)}$ 与上篇中定义的 $\operatorname*{Tr}_{(n+1)'=(n+1)^+}$ 的区别在于前者不包含对时间变量的积分. 对于 $n \geqslant 2$，由 (1.2b) 得

$$i\frac{\partial}{\partial t}c_n(1\cdots n;1'\cdots n';t) = \sum_{j=1}^{n}[I(j) - I'(j')], \tag{2.6}$$

其中

$$\begin{aligned} I(j) &= t(j)c_n(1\cdots n;1'\cdots n';t) \\ &+ \Bigg[\operatorname*{tr}_{(n+1)'=(n+1)} v(j,n+1) \operatorname*{AS}_{(n+1)} \sum\sum\sum_{k>l>m=0} (-i)^{k+l+m} G_c^{(k)} G_c^{(l)} G_c^{(m)} \\ &\times \delta_{k+l+m,n+1}\Bigg]_L \Bigg|_{(t_1'\cdots t_n' t_n \cdots t_{(j+1)} t'_{(n+1)} t_{(n+1)} t_j \cdots t_1)=t}, \end{aligned} \tag{2.7a}$$

$$I'(j') = t(j')c_n(1\cdots n;1'\cdots n';t)$$

$$+\left[\operatorname*{tr}_{(n+1)'=(n+1)} v(j',(n+1)') \operatorname*{AS}_{(n+1)} \sum_{k>l>m=0}\sum\sum (-i)^{k+l+m} G_c^{(k)} G_c^{(l)} G_c^{(m)} \right.$$

$$\left.\times\, \delta_{k+l+m,n+1}\right]_L \Big|_{(t_1'\cdots t_j' t_{(n+1)}' t_{(n+1)} t_{(j+1)}'\cdots t_n' t_n\cdots t_1)=t}, \tag{2.7b}$$

其中 $(t_1'\cdots t_n' t_n\cdots t_{(j+1)} t_{(n+1)}' t_{(n+1)} t_j\cdots t_1)=t$ 表示按照时序

$$t_1'>t_2'>\cdots>t_n'>t_n>\cdots>t_{(j+1)}>t_{(n+1)}'>t_{(n+1)}>t_j>\cdots>t_1$$

取等时极限.

在(2.7a)中,利用(2.4)式, $(-i)^k G_c^{(k)}(k\geqslant 2$ 时)可直接用 c_k 代替. 对于

$$(-i)G_c^{(1)}(p;q')=(-i)G(p;q'),$$

分两种情况: (1) 对于 $(-i)G(p;q'\neq(n+1)^+)$ 和 $(-i)G(p\leqslant j$ 或 $p=(n+1)$; $q'=(n+1)^+)$, 可直接用 $c_1(p;\ q';t)=\rho(p;q';t)$ 代替; (2) 对于$(-i)G(n\geqslant p>j;$ $q'=(n+1)^+)$, 在 n 粒子的正规等时极限下,它们是反正规等时的,故按(2.3b)式,应当用

$$[-iG(p;q')]_{t_q'=t_p^-=t}=-\delta^{(3)}(p,q')+\rho(p;q';t), \tag{2.8}$$

代替. 对(2.7b)式有类似的替换.

从上述分析可知,在计算 $I(j)$ 时,只需特别考虑含 $G(n\geqslant p>j;q'=(n+1)^+)$ 的项目, 它们是

$$-(-i)^{n+1}\Big\{\operatorname*{tr}_{(n+1)} v(j,n+1)$$

$$\times\sum_{i=j+1}^{n}[G_c^{(n)}(1\cdots(i-1),(n+1),(i+1)\cdots n;1'\cdots n')G(i;(n+1))$$

$$+\operatorname*{A_p}_{\{1'\cdots n'\}}\ \operatorname*{S_p}_{\left\{\substack{1\cdots(j-1)(j+1)\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\ 1'\cdots(j-1)'(j+1)'\cdots(i-1)'(i+1)'\cdots n'}\right\}}\ \sum_{k=1}^{n-1} G_c^{(k)}(j,1\cdots(k-1);j',1'\cdots(k-1)')$$

$$\times\, G_c^{(n-k)}(k\cdots(i-1),(n+1),(i+1)\cdots n;k'\cdots(i-1)',i',(i+1)'\cdots n')$$

$$\times\, G(i;(n+1)^+)]\Big\}_{\text{equal time limit}}$$

$$=\sum_{i=j+1}^{n} v(j,i)c_n(1\cdots n;1'\cdots n';t)$$

$$+\sum_{i=j+1}^{n} v(j,i)\ \operatorname*{A_p}_{\{1'\cdots n'\}}\ \operatorname*{S_p}_{\left\{\substack{1\cdots(j-1)(j+1)\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\ 1'\cdots(j-1)'(j+1)'\cdots(i-1)'(i+1)'\cdots n'}\right\}}$$

$$\times\sum_{k=1}^{n-1} c_k(j,1\cdots(k-1);j',1'\cdots(k-1)';t)$$

$$\times\, c_{n-k}(k\cdots i\cdots n;k'\cdots i'\cdots n';t)$$

$$-\operatorname*{tr}_{(n+1)} v(j,n+1)\Big[\sum_{i=j+1}^{n}\Big(c_n c_1(i;n+1;t)$$

$$+\operatorname*{A_p}_{\{\cdots\}}\operatorname*{S_p}_{\{\vdots\}}\sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} c_1(i;n+1;t)\Big)\Big], \tag{2.9a}$$

其中第二项可写成

$$\left\{\sum_{i=j+1}^{n} v(j,i) \underset{(n)}{AS} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}\right\}_L, \tag{2.9b}$$

而第三项和第四项则与(2.7a)中别的项目形式相同，正好可归并在一起。于是，(2.7a)可写成

$$I(j) = \left[t(j) + \sum_{i=j+1}^{n} v(j,i)\right] c_n + \left\{\sum_{i=j+1}^{n} v(j,i) \underset{(n)}{AS} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}\right\}_L$$
$$+ \underset{(n+1)}{\mathrm{tr}}\left[v(j,n+1) \underset{(n+1)}{AS} \sum\sum\sum_{k>l>m=0} c_k c_l c_m \delta_{k+l+m,n+1}\right]_L, \tag{2.10a}$$

类似地

$$I'(j') = \left[t(j') + \sum_{i=j+1}^{n} v(j',i')\right] c_n + \left\{\sum_{i=j+1}^{n} v(j',i') \underset{(n)}{AS} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}\right\}_L$$
$$+ \underset{(n+1)}{\mathrm{tr}}\left[v(j', n+1) \underset{(n+1)}{AS} \sum\sum\sum_{k>l>m=0} c_k c_l c_m \delta_{k+l+m,n+1}\right\}_L, \tag{2.10b}$$

将(2.10a,b)代入(2.6)式，得到 c_n 的运动方程

$$i\frac{\partial}{\partial t} c_n = \left[\sum_{j=1}^{n} (t(j) - t(j')) + \sum_{i>j=1}^{n-1} (v(j,i) - v(j',i'))\right] c_n$$
$$+ \left[\sum_{i>j=1}^{n-1} (v(j,i) - v(j',i')) \underset{(n)}{AS} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}\right]_L$$
$$+ \underset{(n+1)}{\mathrm{tr}}\left[\sum_{j=1}^{n} (v(j,n+1) - v(j',n+1)) \underset{(n+1)}{AS}\right.$$
$$\left.\times \sum\sum\sum_{k>l>m=0} c_k c_l c_m \delta_{k+l+m,n+1}\right]_L. \tag{2.11}$$

(2.5)和(2.11)式正是文献[1]中所给出的多体关联密度矩阵的运动方程组。

三、多体关联 Green 函数的运动方程的各种不同等时极限间的等价性

本节将进一步讨论多体关联 Green 函数的运动方程的各种不同等时极限间的关系。

对于 $n=1$ 情形，取反正规等时极限 $t_1' = t_1^- = t$，得到与方程(2.5)式完全相同的结果。对于 $n \geqslant 2$ 情形，给定任意的一个等时极限，用 AGETL 来表示。根据(1.1)和(2.4)式，可得

$$\left[i^n \sum_{j=1}^{n} \left(i\frac{\partial}{\partial t_j} + i\frac{\partial}{\partial t_j'}\right) G_c^{(n)}(1\cdots n; 1'\cdots n')\right]_{\mathrm{AGETL}}$$
$$= (-)^n i\frac{\partial}{\partial t} c_n(1\cdots n; 1'\cdots n'; t), \tag{3.1}$$

于是，从(3.1)和(1.2b)式可以得到

$$i\frac{\partial}{\partial t} c_n = \left\{(-i)^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \left[\underset{(n+1)'=(n+1)^+}{\mathrm{Tr}} V(j,n+1) \underset{(n+1)}{AS}\right.\right.$$
$$\left.\times \sum\sum\sum_{k>l>m=0} G_c^{(k)} G_c^{(l)} G_c^{(m)} \delta_{k+l+m,n+1}\right]_L$$

$$-(-i)^{(n+1)}\sum_{j=1}^{n}\left[\operatorname*{Tr}_{(n+1)=(n+1)'^-}V(j',n+1)\underset{(n+1)}{AS}\right.$$
$$\left.\left.\times\sum_{k\geq l\geq m=0}\sum\sum G_c^{(k)}G_c^{(l)}G_c^{(m)}\delta_{k+l+m,n+1}\right]_L\right\}_{AGETL}. \quad (3.2)$$

在(3.2)式中，$(-i)^kG_c^{(k)}$ ($k\geqslant 2$ 时)可以直接用 c_k 代替. 而对于 $(-i)G_c^{(1)}(p;q')$，如果 $t'_q=t_p^+$，则直接用 $\rho(p;q';t)$ 代替;如果 $t'_q=t_p^-$，则应当用(2.8)来代替.

为了计算(3.2)式右边,下面对(3.2)式和(2.6)式作比较分析. 考虑(3.2)式右边,由于取的是任意时序的等时极限,使得它与(2.6)式右边有以下几点不同.

(1) 在(2.6)式右边第一项(或第二项)中,对于 $(-i)G(p;q')$，只要 $q'\neq(n+1)^+$ (或 $p\neq(n+1)$)，则在 n 粒子正规等时极限下,它也是正规等时的,可直接用 $\rho(p;q';t)$ 代替. 但在(3.2)右边,由于非正规等时极限 AGETL，在变为密度矩阵 $\rho(p;q';t)$ 时，有可能比(2.6)右边多出一些附加项目. 分三种情形: (i) 包含 $(-i)G(j\neq p\neq(n+1);q'\neq(n+1)^+)$ 或 $(-i)G(p\neq(n+1);j'\neq q'\neq(n+1)^+)$ 的项目是不连接项，在(2.6)和(3.2)中都不可能出现; (ii) 在(3.2)右边第一项中，对于 $(-i)G(p=j;q'\neq(n+1)^+)$，当 $t'_q=t_p^-$ 时会带来一些附加项,它们可写成

$$\sum_{j,q'=X}(-i)^n\left[\operatorname*{tr}_{(n+1)}v(j,n+1)\underset{(n)}{AS}\sum_{k\geq l=0}\sum G_c^{(k)}G_c^{(l)}\delta^{(3)}(j,q')\delta_{k+l,n}\right]_L, \quad (3.3a)$$

这里用 X 表示在 n 粒子等时极限 AGETL 中 $t_j^-=t'_q$ 的集合,即

$$X=\{i,j'\,|\,t_i^-=t'_j\}_{AGETL}.$$

而在(3.2)右边第二项中,对于 $(-i)G(p\neq(n+1);q'=j')$，当 $t_p^-=t'_q$ 时会带来一些相应的附加项，它们是

$$-\sum_{p,j'=X}(-i)^n\left[\operatorname*{tr}_{(n+1)}v(j',n+1)\underset{(n)}{AS}\sum_{k\geq l=0}\sum G_c^{(k)}G_c^{(l)}\delta^{(3)}(p,j')\delta_{k+l,n}\right]_L. \quad (3.3b)$$

显然,(3.3a)与(3.3b)大小相等,符号相反,将相互抵消,总的贡献为零; (iii) 与(ii)中的分析类似,在(3.2)右边第一项中,对于 $(-i)G(p=(n+1);q'\neq(n+1)^+)$,当 $t_p^-=t'_q$ 时会带来一些附加项，而在第二项中，对于 $(-i)G(p\neq(n+1);q'=(n+1))$，当 $t_p^-=t'_q$ 时会出现一些相应的附加项. 这两者将相互抵消，总的贡献为零.

(2) 在(3.2)右边第一项中,对于 $(-i)G(p;q'=(n+1)^+)$,不再有像(2.6)右边第一项中那样简单的时序关系 $t_p^-=t'_q$ (若 $n\geqslant p>j$). 因而对每一个固定的求和指标 j，(3.2)和(2.6)中包含 $(-i)G(p;q'=(n+1)^+)$，的项目将不相同,例如对 $j=1$，(2.6)右边第一项中所有 $(-i)G(n\geqslant p>1;n+1)$ 用(2.8)代替. 但在(3.2)中，有可能存在这样的时序 $t_{p=k}^+=t_{n+1}$，这时 $(-i)G(n\geqslant k>1;\ n+1)$ 应当用 $\rho(k;n+1;t)$ 直接代替，例如取 $k=2$，则对 $j=1$，在(3.2)右边第一项中将少了含 $v(1,2)c_mc_{n-m}$ 的项目;但对 $j=2$，(3.2)右边又会多出同样的项目. 考虑到(3.2)和(2.6)右边都有对 $j=1,\cdots,n$ 的求和,因而对(3.2)和(2.6)式,求和的结果相同.

从上面分析可以看到,(3.2)右边与(2.6)右边相等. 因而,我们证明了关联 Green 函数运动方程的各种不同时序的等时极限是等价的，都导致密度矩阵形式的多体关联动力学方程. 这一性质有着更深刻的根源,多体关联 Green 函数及其运动方程与时序无关. 关于这一点,我们将另文讨论.

四、讨　　论

本篇中，论证了多体关联 Green 函数的运动方程的各种不同时序的等时极限间的等价性，证实了它们都导致多体关联密度矩阵的运动方程，从而展示了多体关联 Green 函数动力学是多体关联密度矩阵动力学的推广。多体关联 Green 函数的优点是把时间坐标与空间坐标放在同等的地位上加以考虑。在非相对论情形，Green 函数的多时性的优点并不突出。但对于相对论性量子场论，由于相互作用的传递需要时间，Green 函数的多时性对描述推迟效应、因果性，区分超前与推迟过程是必不可少的。因此，多体关联 Green 函数动力学是把理论推广到相对论情形并保持理论的相对论协变性所必须的。

结束本篇前，简要讨论一下多体关联 Green 函数动力学中的守恒定律问题。由于力学量的平均值都可以用正规等时 Green 函数，即密度矩阵进行计算，故文献[1]中关于守恒定律的讨论也适合于多体关联 Green 函数理论：一体力学量的守恒定律的保持与关于 $G_c^{(2)}$ 的近似无关，而二体力学量的守恒定律的满足与关于 $G_c^{(3)}$ 的近似无关。

附　　录

下面用数学归纳法证明(2.4)式。

(i) 当 $n=2$ 时，考虑 t_1、t_2、t_1' 和 t_2' 间的所有可能的时序下 $G_c^{(2)}(1,2;1',2')$ 的等时极限，经直接的计算和比较，可得

$$[i^2G_c^{(2)}(1,2;1',2')]_{(\text{any time order})=t}=c_2(1,2;1',2';t). \tag{1}$$

(1)式说明，当 $n=2$ 时，(2.4)式成立。

(ii) 假设当 $2\leqslant n\leqslant m$ 时，(2.4)式成立，即

$$[i^nG_c^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n')]_{(\text{any time order})=t}=(-)^n c_n(1\cdots n;1'\cdots n';t),\quad (2\leqslant n\leqslant m) \tag{2}$$

现在要证明，当 $n=m+1$ 时，(2.4)式也成立。由分离公式，有

$$\begin{aligned}&i^{m+1}G_c^{(m+1)}(1\cdots(m+1);1'\cdots(m+1)')\\&=i^{m+1}G^{(m+1)}(1\cdots(m+1);\ 1'\cdots(m+1)')-\underset{(1'\cdots(m+1)')}{A_p}\ \underset{\left\{\substack{1\cdots(p-1)(p+1)\cdots(m+1)\\1'\cdots(p-1)'(p+1)'\cdots(m+1)'}\right\}}{S_p}\\&\times\sum_{k=1}^{m}[i^kG_c^{(k)}(p,1\cdots(p-1),(p+1)\cdots k;p',1'\cdots(p-1)',(p+1)'\cdots k')]\\&\times[i^{m+1-k}G^{(m+1-k)}((k+1)\cdots(m+1);\ (k+1)'\cdots(m+1)')].\end{aligned} \tag{3}$$

其中 p 表示 $1\cdots(m+1)$ 中任意一个指标。

1、首先，给定一个任意时序($\circ\circ\circ t_pt_q***$)，考虑时序($\circ\circ\circ t_qt_p***$)，两者的区别仅在于 t_p 和 t_q 的次序相反。其中 p、q 是 $1\cdots(m+1)$ 中任意指标。令$(-)^\lambda$ 表示从正规时序交换到给定时序时的费米反对称化因子。由于指标 p 固定在 $G_c^{(k)}$ 中，于是得到

$$\begin{aligned}&[i^{m+1}G_c^{(m+1)}(1\cdots(m+1);\ 1'\cdots(m+1)')]_{(\circ\circ\circ t_pt_q***)=t}\\&=(-)^{\lambda+m+1}\langle\circ\circ\circ\hat{\psi}(p)\hat{\psi}(q)***\rangle_{t_1'=\cdots=t'_{m+1}=t_{m+1}=t_m=\cdots=t_1=t}\\&-\underset{(1'\cdots(m+1)')}{A_p}\ \underset{\left\{\substack{1\cdots(p-1)(p+1)\cdots(m+1)\\1'\cdots(p-1)'(p+1)'\cdots(m+1)'}\right\}}{S_p}\\&\times\sum_{k=1}^{m}[i^kG_c^{(k)}(p,1\cdots(p-1),(p+1)\cdots k;p',1'\cdots(p-1)',(p+1)'\cdots k')]_{(\circ\circ\circ t_pt_q***)=t}\\&\times[i^{m+1-k}G^{(m+1-k)}((k+1)\cdots(m+1);(k+1)'\cdots(m+1)')]_{(\circ\circ\circ t_q***)=t},\end{aligned} \tag{4a}$$

$$[i^{m+1}G_c^{(m+1)}(1\cdots(m+1);1'\cdots(m+1)')]_{(\circ\circ\circ t_qt_p***)=t}$$

$$= (-)^{\lambda+m+2}\langle \circ\circ\circ\hat{\psi}(q)\hat{\psi}(p)\ast\ast\ast\rangle_{t_1'=t_2'=\cdots=t} - \underset{\{1'\cdots(m+1)'\}}{A_p} \underset{\left\{\substack{1\cdots(p-1)(p+1)\cdots(m+1)\\ 1'\cdots(p-1)'(p+1)'\cdots(m+1)'}\right\}}{S_p}$$

$$\times \sum_{k=1}^{m}[i^kG_c^{(k)}(p,1\cdots(p-1),(p+1)\cdots k;p',1'\cdots(p-1)',(p+1)'\cdots k')]_{(\circ\circ\circ t_q t_p\ast\ast\ast)=t}$$

$$\times [i^{m+1-k}G^{(m+1-k)}((k+1)\cdots(m+1);(k+1)'\cdots(m+1)')]_{(\circ\circ\circ t_q\ast\ast\ast)=t}, \tag{4b}$$

现在比较(4a)与(4b)式．显然两式右边第一项相等． 因 p 固定在 $G_c^{(k)}$ 中，故两式右边第二项的差别仅在于 $G_c^{(k)}$ 中的时序．当 $k=1$ 时，q 不可能出现在 $G_c^{(k)}$ 中;而当 $k\geqslant 2$ 时,根据(2)式有

$$[i^kG_c^k]_{(\circ\circ\circ t_p t_q\ast\ast\ast)=t} = [i^kG_c^{(k)}]_{(\circ\circ\circ t_q t_p\ast\ast\ast)=t}, \tag{5}$$

因而两式右边第二项也相等．于是

$$[i^{m+1}G_c^{(m+1)}]_{(\circ\circ\circ t_p t_q\ast\ast\ast)=t} = [i^{m+1}G_c^{(m+1)}]_{(\circ\circ\circ t_q t_p\ast\ast\ast)=t}, \tag{6}$$

类似地
$$[i^{m+1}G_c^{(m+1)}]_{(\circ\circ\circ t_p' t_q'\ast\ast\ast)=t} = [i^{m+1}G_c^{(m+1)}]_{(\circ\circ\circ t_q' t_p'\ast\ast\ast)=t}. \tag{7}$$

2、给定任意时序（$\circ\circ\circ t_p t_q' \ast\ast\ast$)，考虑时序（$\circ\circ\circ t_q' t_p \ast\ast\ast$)．令$(-)^\eta$ 表示从正规时序到给定时序所对应的费米反对称化因子．通过与步骤(1)中类似的分析,可得

$$[i^{m+1}G_c^{(m+1)}]_{(\circ\circ\circ t_p t_q'\ast\ast\ast)=t} - [i^{m+1}G_c^{(m+1)}]_{(\circ\circ\circ t_q' t_p\ast\ast\ast)=t}$$
$$= \delta^{(3)}(p,q')[(-)^{\eta+m+1}\langle\circ\circ\circ\ast\ast\ast\rangle_{(\circ\circ\circ\ast\ast\ast)=t}$$
$$+ i^mG^{(m)}(1\cdots(p-1),(p+1)\cdots(q-1),q,(q+1)\cdots;1'\cdots(p-1)',(p+1)'\cdots$$
$$(q-1)',p',(q+1)'\cdots)_{(\circ\circ\circ\ast\ast\ast)=t}], \tag{8}$$

其中（$\circ\circ\circ\ast\ast\ast$）表示这样的时序：除了 t_p、t_q' 不出现在其中外,它与开始给定的时序完全相同．而$\langle\circ\circ\circ\ast\ast\ast\rangle$表示 $2m$ 个场算符(除 $\hat{\psi}^+(q')$ 和 $\hat{\psi}(p)$ 外）按时序($\circ\circ\circ\ast\ast\ast$)排列乘积的平均值．

假定将时序 $(1\cdots(p-1)(p+1)\cdots(q-1)q(q+1)\cdots(m+1)(m+1)'\cdots(q+1)'p'(q-1)'\cdots(p+1)'(p-1)'\cdots1')$变换到（$\circ\circ\circ\ast\ast\ast$）的费米反对称化因子为$(-)^\mu$,则将时序$(1\cdots(m+1)(m+1)'\cdots1')$ 变换到（$\circ\circ\circ pq'\ast\ast\ast$）的费米反对称化因子为$-(-)^\mu$，于是有$(-)^{\eta+m+1} = -(-)^\mu$.
则(8)式右边第二项变为 $-(-)^{\eta+m+1}\delta^{(3)}(p,q')\langle\circ\circ\circ\ast\ast\ast\rangle_{(\circ\circ\circ\ast\ast\ast)=t}$, (9)

故(8)式右边为零,即 $[i^{m+1}G_c^{(m+1)}]_{(\circ\circ\circ t_p t_q'\ast\ast\ast)=t} = [i^{m+1}G_c^{(m+1)}]_{(\circ\circ\circ t_q' t_p\ast\ast\ast)=t}$. (10)

3、由(6)、(7)及(10)式,容易得到 $[i^{m+1}G_c^{(m+1)}]_{(\text{any time order})=t} = (-)^{m+1}c_{m+1}$. (11)

即如果 $2\leqslant n\leqslant m$ 时,(2.4)式成立,则当$n=m+1$时,(2.4)式也成立．因此,对任意$n\geqslant 2$,结论正确.

参 考 文 献

[1] S.J. Wang and W. Cassing, *Ann. Phys.*, **159**(1985), 328.
[2] 左维、王顺金,多体关联 Green 函数动力学 I. 多体关联 Green 函数的运动方程,高能物理与核物理,待发表.

Dynamics of Many-Body Correlation Green's Functions II. Equal Time Limit

Zuo Wei Wang Shunjin
(*Lanzhou University*, 730001)

Abstract

Under equal time limit, it is shown that the dynamic equations of the n-body correlation Green's functions $G_c^{(n)}$ leads to the set of equations for time evolution of the n-body correlations c_n and the many-body correlation Green's functions and their equations of motion are independent of the time order.