

相互作用玻色子模型的非厄米 Dyson 玻色子展开途径

邓卫真 杨泽森 王玉成

(北京大学物理系, 100871)

摘 要

通过 Dyson 玻色子展开及修正的 Jancovici 和 Schiff 代换, 得到费米子集体 S, D 对态空间与相互作用玻色子模型 s, d 空间之间的一一对应. 费米子算符的玻色子像被唯一确定, IBM 哈密顿量具有非厄米形式. 费米子矩阵元能够在玻色子空间内直接计算, 并且, 当需要清除伪态时, 相应的投影计算也能在玻色子空间进行.

一、引 言

在相互作用玻色子模型(IBM)的微观研究中, 经常采用玻色子展开方法^[1]. 通常的玻色子展开方法是将费米子态空间映射到通常的玻色子空间中的物理子空间^[2], 在实际应用中, 这样的物理态的玻色子结构非常复杂, 很难直接使用. 为此已经提出不少修正方案^[3].

最近, 本文作者杨泽森及 A. Arima 等对通常的玻色子展开途径作了修改^[4], 将微观 IBM 模型中的费米子低能集体态空间直接映射到 IBM s, d 玻色子空间, IBM 哈密顿量则由费米子对结构及费米子哈密顿量直接得到. 根据这一修正, 同时存在厄米和非厄米两种途径, 其中非厄米途径由于无需进行投影计算, 处理起来较为简便, 对于群论模型尤为如此^[5].

本文采用 Dyson 玻色子展开方法系统研究微观 IBM 的玻色子展开非厄米途径. 在下一节中, 引入修正的 Usui 映射算符建立费米子低能集体态与 IBM 玻色子态之间的一一对应, 决定 IBM 玻色子哈密顿量及其它的玻色子算符. 在第三节中, 通过引入第二类玻色子算符表示, 导出计算费米子矩阵元的玻色子公式. 在第四节中, 讨论如何清除玻色子态中存在的伪态成分.

二、玻色子哈密顿量和玻色子算符

Dyson 玻色子展开通过 Usui 算符将费米子态一一映射为通常的物理的玻色子态^[2],

$$|\Psi\rangle = U|\Psi\rangle, \quad (2.1)$$

$$U = \langle 0 | \exp\left\{ \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^{\dagger} a_{\beta} a_{\alpha} \right\} | 0 \rangle, \quad (2.2)$$

这里, $A_{\alpha\beta}^{\dagger}$ 为玻色子产生算符. 费米子算符的玻色子映像则定义为

$$F_B U = U F. \quad (2.3)$$

由式(2.3), 玻色子算符 F_B 并不能唯一地确定, 仅当算符作用在所说的物理玻色子态上时, 结果是唯一的. 按照 IBM, 由于对关联, 假设低能集体态位于一个由有限种费米子对构成的很小的组态空间内. 若只考虑 S, D 对

$$|\Psi^{\text{IBM}}\rangle = f(S^+, D_{\mu}^{\dagger})|0\rangle, \quad (2.4)$$

S^+, D_{μ}^{\dagger} 即为费米子对产生算符, 角动量、宇称分别为 $L^{\pi} = 0^+, 2^+$. 上述费米子态的直接玻色子物理态映像极其复杂, 并没有简单的玻色子结构.

根据文献[4], 引入如下的修正 Dyson 映射算符, 它仅仅作用在 IBM 费米子 S, D 对子空间上,

$$U_{\text{IBM}} = \langle 0 | \exp\{s^+ S + \sum_{\mu} d_{\mu}^{\dagger} D_{\mu}\} | 0 \rangle, \quad (2.5)$$

其中 s^+, d_{μ}^{\dagger} 即 IBM 玻色子产生算符. 有

$$U_{\text{IBM}} S = s U_{\text{IBM}}, \quad (2.6)$$

$$U_{\text{IBM}} D_{\mu} = d_{\mu} U_{\text{IBM}}, \quad (2.7)$$

于是, 费米子态与相应的玻色子态之间的关系由以下的修正的 Jancovici-Schiff (MJS) 代换给出^[6],

$$f(S^+, D_{\mu}^{\dagger})|0\rangle = U_{\text{IBM}}^{\dagger} f(s^+, d_{\mu}^{\dagger})|0\rangle. \quad (2.8)$$

上述映射为 IBM 玻色子态 $f(s^+, d_{\mu}^{\dagger})|0\rangle$ 到费米子态 $f(S^+, D_{\mu}^{\dagger})|0\rangle$ 的满映射, 但不一定为一一映射, 当且仅当 S, D 费米子子空间无伪态, 即

$$f(S^+, D_{\mu}^{\dagger})|0\rangle = 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

时, 该映射为一一映射. 这时, 存在逆算符 U_{IBM}^{-1} . 一般说来, 该逆算符的结构相当复杂, 这里不做进一步讨论.

下面来确定费米子算符的玻色子表示, 我们仅对作用在 S, D 费米子对空间上不变的费米子算符感兴趣. 假设费米子算符 F 保持 S, D 费米子对子空间不变,

$$F f(S^+, D_{\mu}^{\dagger})|0\rangle = f_F(S^+, D_{\mu}^{\dagger})|0\rangle, \quad (2.9)$$

要求相应的玻色子算符 F_{IBM} 也满足同样的关系

$$F_{\text{IBM}} f(s^+, d_{\mu}^{\dagger})|0\rangle = f_F(s^+, d_{\mu}^{\dagger})|0\rangle. \quad (2.10)$$

由此, 定义玻色子算符为

$$U_{\text{IBM}} F U_{\text{IBM}}^{\dagger} = U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^{\dagger} F_{\text{IBM}}, \quad (2.11)$$

当无伪态时, 得

$$F_{\text{IBM}} = (U_{\text{IBM}}^{-1})^{\dagger} F U_{\text{IBM}}^{\dagger}, \quad (2.12)$$

可唯一确定玻色子算符. 对于体系的哈密顿量, 有

$$H_{\text{IBM}} = (U_{\text{IBM}}^{-1})^{\dagger} H U_{\text{IBM}}^{\dagger}, \quad (2.13)$$

并且, 如果 $|\Psi\rangle$ 是玻色子哈密顿量 H_{IBM} 的本征态, 本征能量为 E ,

$$H_{\text{IBM}}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (2.14)$$

则由 MJS 代换(2.8)式得到的费米子态 $|\Psi\rangle$ 即为费米子哈密顿量 F 的本征态,且具有相同的本征能量 E ,

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle. \quad (2.15)$$

三、费米子矩阵元的玻色子表示

当找到 IBM 哈密顿量 H_{IBM} 之后,求解本征方程(2.14)便得到玻色子本征波函数及其能量.通常,由式(2.13)得到的玻色子哈密顿量 H_{IBM} 是非厄米的.可以认为费米子哈密顿量对应着两个不同的玻色子表示: H_{IBM} 及其共轭表示 H_{IBM}^+ .一般地,任意费米子算符 F 均对应有两个不同的玻色子表示^[4],一个由式(2.11)确定,另一个为 F'_{IBM} ,称为第二类玻色子算符表示.当无伪态时

$$F'_{\text{IBM}} = U_{\text{IBM}} F U_{\text{IBM}}^{-1}. \quad (3.1)$$

下面,利用费米子算符的两种不同玻色子表示来求其矩阵元.记玻色子本征态为 $|\psi_m\rangle$,能量为 E_m ,由 MJS 代换,相应的费米子本征态为

$$|\psi_m\rangle = U_{\text{IBM}}^{\pm} |\psi_m\rangle. \quad (3.2)$$

正交关系为

$$\langle \psi_m | U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^{\pm} | \psi_n \rangle = \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \alpha_m \delta_{mn}. \quad (3.3)$$

记 $|\psi'_m\rangle$ 为 H_{IBM}^+ 的本征态,并有相同的本征值 E_m .由于哈密顿量是非厄米的,其正交归一化条件取为

$$\langle \psi'_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}, \quad (3.4)$$

当取定 ψ_n 后,由 $\langle \psi'_n | \psi_n \rangle = 1$ 来确定 ψ'_n 的大小.由此得到

$$U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^{\pm} |\psi_m\rangle = \alpha_m |\psi'_m\rangle. \quad (3.5)$$

设费米子 S, D 对空间无假态,即所有 $\alpha_m \neq 0$,费米子算符 F 的矩阵元可表为

$$F_{nm} = \frac{\langle \psi_n | F | \psi_m \rangle}{\sqrt{\langle \psi_m | \psi_m \rangle \langle \psi_n | \psi_n \rangle}}, \quad (3.6)$$

或在玻色子空间表为

$$F_{nm} = \frac{\langle \psi_n | U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^{\pm} F_{\text{IBM}} | \psi_m \rangle}{\sqrt{\langle \psi_m | U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^{\pm} | \psi_m \rangle \langle \psi_n | U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^{\pm} | \psi_n \rangle}}, \quad (3.7)$$

这里 F_{IBM} 为式(2.11)定义的玻色子算符.由式(3.6)

$$F_{nm} = \sqrt{\frac{\alpha_n}{\alpha_m}} \langle \psi'_n | F_{\text{IBM}} | \psi_m \rangle. \quad (3.8)$$

同样,对于 F 的厄米共轭,有

$$F_{nm} = (F_{mn}^{\pm})^* = \sqrt{\frac{\alpha_m}{\alpha_n}} \langle \psi'_m | F_{\text{IBM}}^{\pm} | \psi_n \rangle^*. \quad (3.9)$$

最后,得到

$$F_{nm} = \sqrt{\langle \psi'_n | F_{\text{IBM}} | \psi_m \rangle \langle \psi_n | F'_{\text{IBM}} | \psi'_m \rangle}. \quad (3.10)$$

上述公式与通常唯象公式有两点不同:(1)微观公式中有两个不同的玻色子算符,它们都对应着同一费米子算符,为同一费米子算符的玻色子表示。(2)由于所得的玻色子波函数不正交;需要另一组波函数,它们之间由式(3.5)正交化。

四、关于伪态的消除

根据修正后的 IBM 的玻色子展开途径,费米子态不再被映射到原来所说的玻色子物理子空间,由此有可能出现伪态——虽然玻色子态 $|\psi\rangle \neq 0$,但其对应的费米子态因违反 Pauli 原理而有 $|\psi\rangle = 0$ 。若 $|\psi\rangle$ 是伪态,则

$$\langle \psi | U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 0. \quad (4.1)$$

所以,对各能量本征态计算以下投影矩阵元

$$N_m = \langle \psi_m | U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ | \psi_m \rangle, \quad (4.2)$$

矩阵元为零者即为伪态。欲求 N_m , 需求

$$|\psi_m^p\rangle \equiv U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ | \psi_m \rangle. \quad (4.3)$$

将 $|\psi_m\rangle$ 写为

$$|\psi_m\rangle = f_m(s^+, d_\mu^+) | 0 \rangle, \quad (4.4)$$

则

$$|\psi_m^p\rangle = U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ f_m(s^+, d_\mu^+) | 0 \rangle. \quad (4.5)$$

假设 $\mathcal{S}, \mathcal{D}_\mu$ 是 S, D_μ 的玻色子算符,在存在伪态时定义为

$$U_{\text{IBM}} S U_{\text{IBM}}^+ = U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ \mathcal{S}, \quad (4.6)$$

$$U_{\text{IBM}} D_\mu U_{\text{IBM}}^+ = U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ \mathcal{D}_\mu, \quad (4.7)$$

则 $\mathcal{S}^+, \mathcal{D}_\mu^+$ 为 S^+, D_μ^+ 的第二类玻色子算符。由式(2.6),对于任意的玻色子态 $f(s^+, d_\mu^+) | 0 \rangle$ 都有

$$U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ s^+ f(s^+, d_\mu^+) | 0 \rangle = U_{\text{IBM}} s^+ U_{\text{IBM}}^+ f(s^+, d_\mu^+) | 0 \rangle. \quad (4.8)$$

再由式(4.6)

$$U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ s^+ f(s^+, d_\mu^+) | 0 \rangle = \mathcal{S}^+ U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ f(s^+, d_\mu^+) | 0 \rangle. \quad (4.9)$$

同样,由式(2.7)和(4.7),对 d_μ^+ , 得到

$$U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ d_\mu^+ f(s^+, d_\mu^+) | 0 \rangle = \mathcal{D}_\mu^+ U_{\text{IBM}} U_{\text{IBM}}^+ f(s^+, d_\mu^+) | 0 \rangle. \quad (4.10)$$

最后递推得到

$$|\psi_m^p\rangle = f_m(\mathcal{S}^+, \mathcal{D}_\mu^+) | 0 \rangle. \quad (4.11)$$

我们看到,为了计算玻色子本征态 $|\psi_m\rangle$ 的投影矩阵元 N_m , 只需做变换

$$|\psi_m^p\rangle = |\psi_m\rangle |_{s^+ \rightarrow \mathcal{S}^+, d_\mu^+ \rightarrow \mathcal{D}_\mu^+}, \quad (4.12)$$

将波函数中的玻色子产生算符 s^+, d_μ^+ 换成第二类玻色子算符 $\mathcal{S}^+, \mathcal{D}_\mu^+$, 然后计算 $|\psi_m^p\rangle$ 与 $|\psi_m\rangle$ 之间的模。

五、小 结

本文在 Dyson 玻色子展开下研究修正的 IBM 玻色子展开非厄米途径。这里没有讨论

如何确定低能集体性 S, D 费米子对的结构, 但一旦得到了它们的结构, 就可将 S, D 费米子对空间映射到 IBM s, d 玻色子空间并定义相应费米子算符的玻色子算符. 通过引入修正 $U_{\text{su}}^{\text{su}}$ 算符 U_{IBM} , 在无伪态时可唯一确定玻色子算符. 由玻色子哈密顿量即可得到波函数及能量. 费米子矩阵元可在玻色子空间求出, 并避免复杂的投影计算. 进一步, 即使存在伪态, 清除伪态所必须的投影计算也比通常途径简单.

参 考 文 献

- [1] C. T. Li, *Phys. Lett.*, **120B**(1983), 251.
T. S. Yang, Y. Lin H. Qi, *Nucl. Phys.*, **A421**(1984), 297c.
- [2] D. Janssen, F. Döna, S. Frauendorf, R. V. Jolos, *Nucl. Phys.*, **A172**(1971), 145.
- [3] K. Takada, *Nucl. Phys.*, **A439**(1985), 489.
- [4] T. S. Yang, A. Arima, H. Qi, T. Otsuka, X. H. Li, "Modified Dyson mapping and a generalized O-A-I method for non-degenerate j shells", Preprint.
- [5] H. B. Geyer, F. J. W. Hahne, *Nucl. Phys.*, **A363**(1981), 45.
- [6] 杨泽森, 高能物理与核物理, **8**(1984), 75.

A Non-Hermitian Approach of Dyson Boson Expansion to Interacting Boson Model

DENG WEIZHEN YANG ZESEN WANG YUCHENG

(Peking University, 100871)

ABSTRACT

Through boson expansion and the modified Jancovici-Schiff substitution a 1-to-1 correspondence between fermion collective pair space and the interacting boson space is obtained. The boson mappings of fermion operators are uniquely determined and the IBM Hamiltonian takes a non-Hermitian form. The calculation of fermion matrix elements and spurious problem are also discussed.