第17卷 第7期
1993年7月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 7
July, 1993

Baby 宇宙中的非阿贝尔蛀洞解

颜　骏　陶必友　胡诗可
(四川大学物理系,成都,610064)

摘　要

通过在 baby 宇宙的拉氏量中增加宇宙常数和 Kalb-Ramond 场的贡献,获得了三维和四维流形上的一般非阿贝尔蛀洞解.

一、引　言

对规范场中瞬子解和引力瞬子解的研究已有较长的历史[1,2]. 但长期以来,人们对规范场与引力场耦合系统的瞬子解却了解得很少. 不久前,Giddings 和 Strominger 首次成功地获得了引力耦合 Kalb-Ramond 规范场体系的瞬子解[3],这些瞬子解可看作是量子宇宙中两个大平滑时空区域间的微观连接,因此它们又被称为蛀洞解(Wormhole Solutions). 在物理上,这些解可用来澄清宇宙常数困难[4]、时空维数和量子混沌[5-7]、以及 baby 宇宙中的三次量子化[8]等实际问题. 目前人们已发现了各种类型的蛀洞解,例如高维轴子解[9]、$SO(N+1)\otimes SO(N+1)$解[10]、标量场解[11]以及超弦解[12,13]等. 本文主要考虑了在 baby 宇宙拉氏量中分别增加宇宙常数项和 Kalb-Ramond 场的作用,从而获得了三维 Yang-Mills 蛀洞解和四维 Yang-Mills-Kalb-Ramond 蛀洞解,还着重讨论了这些解的物理意义和拓扑性质.

二、三维 Yang-Mills 蛀洞解

1. $U(1)$蛀洞解

首先考察一种三维引力模型与$U(1)$规范场的耦合,然后将有关结果推广到具有非阿贝尔规范场耦合的情况. 这时模型的拉氏量为[14]

$$S=\int dx^3\ \sqrt{g}\left[-\frac{1}{16\pi G}(R+2\Lambda)+\frac{1}{4e^2}g^{ij}g^{kl}F_{ik}F_{jl}\right]. \tag{2.1}$$

注意在拉氏量中已增加了正宇宙常数项 Λ 的作用. 式中 G 是牛顿常数,e^2 是规范耦合常数,R 是三维标量曲率,$F_{ij}=\partial_i A_j-\partial_j A_i$ 是$U(1)$规范场的场强. 当变分拉氏量(2.1)后,即得到如下场方程

本文1992年1月7日收到.

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R-\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu}^{(F)},\tag{2.2}$$

这里 $T_{\mu\nu}^{(F)}$ 是三维能量动量张量. 为了获得合适的蛀洞解，可选择如下的球对称度规：

$$dS^2=dt^2+a^2(t)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2),\tag{2.3}$$

式中 $a(t)$ 是两维球 S^2 的半径. 同时可采用 Gupta 等人的文章中对量子化 $U(1)$ 规范场强所作的假定[14]：

$$F=\frac{n}{2a^2},\tag{2.4}$$

注意这时场强 F 满足给定几何中的 Maxwell 场方程. (2.4)式中 n 是任意整数($n\in\mathbb{Z}$)，所以"磁通"

$$\int_{S^2}F=2\pi n\tag{2.5}$$

也是量子化的. 因此 F 可以看作是一类整上同调群 $H^2(S^2,\mathbb{Z})$ 的元. Rohm 和 Witten 曾获得高亏格两维曲面 $\sum^2$ 上类似的"磁通"量子化 $\int_{\Sigma^2}F=2\pi n$[15]. 现在两维球 S^2 上的拉氏密度为：

$$\frac{F^2}{2e^2}=\frac{n^2}{8e^2a^4},\tag{2.6}$$

所以标度因子 $a(t)$ 应满足如下的 Einstein 场方程：

$$2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}\right)=-\frac{8\pi G}{e^2}\cdot\frac{n^2}{4a^4}+\Lambda.\tag{2.7}$$

方程(2.7)变形后即得到：

$$\frac{da}{dt}=\sqrt{1-\frac{r_n^2}{a^2}+\Omega a^2},\tag{2.8}$$

这里参量 $\Omega=\frac{\Lambda}{2}>0$, $r_n=\sqrt{\frac{\pi G}{e^2}}\cdot n$. 蛀洞喉的半径可由 $\frac{da}{dt}=0$ 确定. 当宇宙常数 $\Omega=0$(即 $\Lambda=0$)时，由 $\frac{da}{dt}=0$ 得到蛀洞喉半径为 r_n；当 $\Omega>0$(即 $\Lambda>0$)，蛀洞喉半径不再是 r_n，根据(2.8)式，可求得蛀洞喉的半径，它应为

$$a_{\min}=\left[\frac{-1+\sqrt{1+4\Omega r_n^2}}{2\Omega}\right]^{1/2}.\tag{2.9}$$

解微分方程(2.8)后，即求出如下蛀洞解：

$$t=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\ln(2\Omega a^2+1+2\sqrt{\Omega(\Omega a^4+a^2-r_n^2)}),\tag{2.10}$$

或者：

$$\exp(2\sqrt{\Omega}t)=2\Omega a^2+1+2\sqrt{\Omega(\Omega a^4+a^2-r_n^2)}.$$

这时，一个"半蛀洞"的欧氏作用量为：

$$S_E=\frac{1}{e^2}\int dx^3\sqrt{g}F^2$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{d}t(4\pi a^2)\cdot\frac{n^2}{4e^2a^4}$$

$$=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{a^2}\cdot\frac{\pi n^2}{e^2}. \tag{2.11}$$

将(2.10)式代入上式后可得到

$$S_E=\frac{\pi n^2}{r_n\cdot 2e^2}\left[\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+4\Omega r_n^2}}+\arcsin\frac{\frac{2r_n^2}{a_0^2}-1}{\sqrt{1+4\Omega r_n^2}}\right]. \tag{2.12}$$

这里的欧氏作用量 S_E 可看作是一种磁单极的自能表达式. 因此上面所获得的蛀洞解又称为“磁蛀洞”解. 当宇宙常数 $\Omega=\frac{\Lambda}{2}\to 0$、$a_0=r_n$ 时，S_E 趋于

$$S_E=\frac{\pi n^2}{2e^2}\cdot\frac{1}{r_n}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi^{3/2}\cdot n}{2e\sqrt{G}}. \tag{2.13}$$

(2.13)式正是 Gupta 等人获得的“半蛀洞”作用量[14]. 一般来说，这些带有宇宙项的蛀洞解可用来描写两个三维反 de-Sitter 宇宙间的微观连接效应.

2. $SU(N)$蛀洞解

在物理方面，除了 $U(1)$规范场外，人们更感兴趣的是非阿贝尔规范场与引力场的耦合. 在寻找非阿贝尔蛀洞解时，仍采用球对称度规；Yang-Mills 场强可取为：[14]

$$F=\frac{1}{2a^2}Q. \tag{2.14}$$

这里，F 同样满足给定几何中的 Yang-Mills 场方程，Q 是 Lie 代数 G 的元. 当 $G=SU(N)$ 时，在确定的规范下，Q 的取值可满足[14]：

$$Q_n=\mathrm{diag}(\underbrace{\frac{n}{N},\cdots,\frac{n}{N}}_{N\text{-}n\text{ 倍}},\underbrace{\frac{n-N}{N},\cdots,\frac{n-N}{N}}_{n\text{ 倍}}),\quad n=1,2,\cdots,N-1. \tag{2.15}$$

这时，两维球 S^2 上的拉氏密度变为：

$$\frac{1}{e^2}\mathrm{tr}F^2=\frac{1}{4e^2a^4}\cdot\frac{n(N-n)}{N}. \tag{2.16}$$

在这种情况下，蛀洞参量 b_n 应满足

$$b_n^2=\frac{2\pi G}{e^2}\cdot\frac{n(N-n)}{N}. \tag{2.17}$$

这种蛀洞半径同样可由$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=0$ 定出，它的形式和(2.9)式是一致的(只需将 r_n 代换为 b_n 即可).

同样，根据前面类似的计算方法，在(2.12)中将 r_n 代替为 b_n，即可得到 $SU(N)$情况下的蛀洞解. 这时的 $SU(N)$“半蛀洞”作用量成为：.

$$S_E=\frac{\pi}{2e^2b_n}\cdot\frac{n(N-n)}{N}\left[\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+4\Omega b_n^2}}+\arcsin\frac{\frac{2b_n^2}{a_0^2}-1}{\sqrt{1+4\Omega b_n^2}}\right]. \tag{2.18}$$

从上面获得的蛀洞解中不难看出，当增加了宇宙常数项的作用后，阿贝尔与非阿贝尔 Yang-Mills 蛀洞解之间仍有很多不同之处. 对于 $U(1)$ 蛀洞解，由于参量 r_n 是整数量子化的，所以半径 $a_{\min}$ 可以任意大；但对于 $SU(N)$ 蛀洞解，蛀洞喉的半径 $a_{\min}$ 却有一个最大的尺度. 这是由于拓扑磁通取值于 $SU(N)$ 的中心，因此它仅有有限个数目的非平庸值，从而导致蛀洞参量 b_n 有一个上限. 这一特点在具有整体 Z_n 离散对称的情况下仍保持着. 所以对于 $SU(N)$ 的 Yang-Mills 蛀洞灾难问题可以避免[16]. 这一点与我们在前文中讨论过的情况有类似之处[6].

三、四维 Yang-Mills-Kalb-Ramond 蛀洞解

1. SU(2)蛀洞解

当增加了正宇宙常数的作用后，Hosoya 和 Ogura 曾发现一种 $SU(2)$ 的球对称 Yang-Mills 蛀洞解[17]. 本文以此为基础，进一步在拉氏量中增加 Kalb-Ramond 场（或轴子场）的作用，从而获得了更一般的 $SU(2)$Yang-Mills-Kalb-Ramond 蛀洞解. 为此，首先假定如下的四维欧氏作用量：

$$S=-\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}x^4\sqrt{g}R+\int \mathrm{d}x^4\sqrt{g}\Lambda+\frac{1}{4e^2}\int \mathrm{d}x^4\sqrt{g}(F^a_{\mu\nu})^2+\int \mathrm{d}x^4\sqrt{g}H^2. \tag{3.1}$$

式中 G、Λ、e 与上节中定义的参量一致. H 是 3-形式的 Kalb-Ramond 场强. 四维标量曲率 R 和 $SU(2)$Yang-Mills 场强 $F^a_{\mu\nu}$ 可以分别由仿射联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 和 $SU(2)$ 规范联络 A^a_μ 定义，即

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}.$$

$$R_{\mu\nu}=R^\lambda_{\mu\lambda\nu},\quad R^\lambda_{\mu\nu\rho}=\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\rho}-\partial_\rho\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+\cdots,$$

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\mu. \tag{3.2}$$

变分(3.1)式后可得如下的 Einstein 场方程：

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+8\pi G\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi GT^{(F)}_{\mu\nu}+16\pi GT^{(H)}_{\mu\nu}, \tag{3.3}$$

这里能量动量张量定义为：

$$T^{(F)}_{\mu\nu}=\frac{1}{e^2}\left[F^a_{\mu\rho}F^{a\rho}_\nu-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}(F^a_{\rho\sigma})^2\right], \tag{3.4}$$

$$T^{(H)}_{\mu\nu}=3H^2_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}H^2. \tag{3.5}$$

同时，Yang-Mills 场方程成为

$$D^\mu F^a_{\mu\nu}=0. \tag{3.6}$$

在求蛀洞解之前，可对度规和规范联络作如下的球对称 ansatz[17]：

$$\mathrm{d}S^2=\mathrm{d}t^2+a^2(t)\sigma^a\otimes\sigma^a=\mathrm{d}t^2+e^a\otimes e^a, \tag{3.7}$$

$$A^a=A^a_\mu\mathrm{d}x^\mu=h\sigma^a. \tag{3.8}$$

这里的左手不变 1-形式 σ^a 满足 $SU(2)$Maurer-Cartan 结构方程：

$$\mathrm{d}\sigma^a+\varepsilon^{abc}\sigma^b\wedge\sigma^c=0. \tag{3.9}$$

标架 e^a 定义为 $e^a=a(t)\sigma^2$. 注意同位旋指标和标架指标是相等的，所以 2-形式的场强 $F^a=$

$\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$ 成为：

$$\begin{aligned}F^a &= \mathrm{d}A^a + \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}A^b\wedge A^c \\ &= (-h + \frac{1}{2}h^2)\varepsilon^{abc}\sigma^b\wedge\sigma^c.\end{aligned} \tag{3.10}$$

还应注意到 F^a 的对偶场强 $^*F^a$ 的微分形式是 $^*F^a=(-2h+h^2)\mathrm{d}t\wedge\frac{e^a}{a^2}$，所以有：

$$\begin{aligned}D\,^*F^a &= \mathrm{d}\,^*F^a + \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}(A^b\wedge{}^*F^c - {}^*F^b\wedge A^c) \\ &= \varepsilon^{abc}\mathrm{d}t\wedge\sigma^b\wedge\sigma^c(-2h+h^2)(-1+h)/a \\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

方程(3.11)的非平庸解是 $h=1$，并且它给出如下的非零场强：

$$F^a_{bc} = F^a_{ij}e^{bi}e^{cj} = -\frac{\varepsilon^{abc}}{a^2}, \tag{3.12}$$

$$F^a_{0b} = F^a_{0i}e^{bi} = 0. \tag{3.13}$$

为了获得一般的非阿贝尔蛀洞解，还应考虑 Kalb-Ramond 场满足的轴子场方程：

$$\mathrm{d}H^* = 0, \tag{3.14}$$

这里的 * 号代表 Hodge 对偶. 同样，取如下的球对称度规：

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}t^2 + a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2, \tag{3.15}$$

式中 $\mathrm{d}\Omega_3^2$ 是三维球 S^3 的线元，轴子场 H 可假定为：

$$H = h(t)\varepsilon, \tag{3.16}$$

ε 是 S^3 的体积元，所以有

$$\int_{S^3}\varepsilon = 2\pi^2a^3(t). \tag{3.17}$$

如果轴子流守恒方程 $\mathrm{d}H=\mathrm{d}H^*=0$ 成立的话，那么可设：

$$h(t) = \frac{n}{a^3}, \quad (n\in\mathbb{Z}), \tag{3.18}$$

所以 Kalb-Ramond 场 H 的拓扑量子化条件为：

$$\int_{S^3}H = 2\pi^2 n. \tag{3.19}$$

因此 H 可看作是一类整上同调群 $H^3(S^3,\mathbb{Z})$ 的元.

将 Yang-Mills 场方程和轴子场方程导出的非零场强 F^a_{bc} 以及 H 代入 Einstein 场方程(3.3)后，那么标度因子 a 应满足如下的微分方程：

$$(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t})^2 = 1 - \frac{r_0^2}{a^2} - \frac{r_n^2}{a^4} - \Omega a^2. \tag{3.20}$$

式中 $r_0=\sqrt{\frac{G}{\alpha}}$，$\alpha=\frac{e^2}{4\pi}$ 是"精细结构常数"，$r_n=4\sqrt{\pi G}\cdot n$，$\Omega=\frac{8\pi G}{3}\Lambda$. 注意这里出现了两个蛀洞参量 r_0 和 r_n，它们分别由 Yang-Mills 场和轴子场所支撑.

当然，这时的蛀洞喉半径同样可由 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=0$ 确定. 下面讨论几种特殊情况.

①当 $r_n=0$、$\Omega=0$ 时，蛀洞喉半径 $a_{\min}=r_0$；这时方程(3.20)的解为：$a(t)=(t^2+r_0^2)^{1/2}$. 那么有 $t=0$ 时，$a(0)=a_{\min}$；而当 $t\to\infty$时，$a(t)\to\infty$，这时的 Yang-Mills 蛀洞连接的是两个平滑的欧几里德空间.

②当 $r_n=0$，$\Omega\neq 0$ 时，由$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=0$ 可定出蛀洞喉半径，从(3.20)不难看出蛀洞喉半径存在极大和极小值，且有

$$a_{\min}=\left[\frac{1-\sqrt{1-4\Omega r_0^2}}{2\Omega}\right]^{1/2},\quad a_{\max}=\left[\frac{1+\sqrt{1-4\Omega r_0^2}}{2\Omega}\right]^{1/2}.$$

根据 Myers[9]和 Hosoya[17]等人文章中的分析，这时的 Yang-Mills 蛀洞连接的是两个 de-Sitter 宇宙.

③当 r_0、r_n、Ω 均不为零时，在$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=0$ 情况下，令 $a^2=x$，那么可得三次方程

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0.$$

式中 $A=-\frac{1}{\Omega}$，$B=\frac{r_0^2}{\Omega}$，$C=\frac{r_n^2}{\Omega}$. 若令 $x=y-\frac{A}{3}$，则经过简单的计算可得到缺二次项的三次方程

$$y^3+py+q=0.$$

这时 $p=B-\frac{A^2}{3}$，$q=C-\frac{A\cdot B}{3}+\frac{2A^3}{27}$. 如果此方程的判别式 $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\leqslant 0$，那么可以求出三个实根. 从原则上讲，所分析的 $SU(2)$Yang-Mills-Kalb-Ramond 模型中蛀洞喉半径同样可能存在最大值 $a_{\max}$和最小值 $a_{\min}$，所以这类蛀洞连接的宇宙和 $SU(2)$Yang-Mills 蛀洞所连接的宇宙有相似之处.

解微分方程(3.20)得到：

$$t=\int\frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1-\frac{r_0^2}{a^2}-\frac{r_n^2}{a^4}-\Omega a^2}}. \tag{3.21}$$

一般来说，(3.21)式不能明显地积出来，但它通常可以用椭圆积分加以表示. 经过一系列变量代换和详细推导之后，我们得到：

$$t=-\frac{1}{r_n\beta(\beta-\gamma)^{1/2}}\Pi\left[\arcsin\left(\frac{Z-\beta}{\alpha-\beta}\right)^{1/2},\frac{\alpha-\beta}{\beta},\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right)^{1/2}\right]. \tag{3.22}$$

这里，$\Pi(\varphi,n,k)$是标准的第三类椭圆积分[13]. α、β、γ 分别是三次方程 $-Z^3-\left(\frac{r_0}{r_n}\right)^2Z^2+\frac{Z}{r_n^2}-\frac{\Omega}{r_n^2}=0$ 的三个根，且 $\beta>\alpha$，$\beta>\gamma$. (3.22)式即为我们获得的具有 Kalb-Ramond 场耦合的一般 $SU(2)$蛀洞解. 当 $H\to 0$，我们的解便回到 Hosoya-Ogura 的蛀洞解. 同样地，采用上节类似的方法也不难获得蛀洞的欧氏作用量.

2. 超弦蛀洞解

下面，准备考虑一个四维超弦模型. 由于超弦模型可看作是一种一般的量子引力理论，因此自然需要在模型中考虑宇宙常数的作用. 一般来说，弦场方程可由共形 σ 模型导出，一个包含宇宙项的四维超弦等效作用量可表示为[3,13]

$$S=\int\mathrm{d}x^4\sqrt{g}\,\mathrm{e}^{\beta\varphi}\left[-R-(\nabla\varphi)^2+H^2+\frac{\alpha'}{8}(R^2-F^2)+2\Lambda\right]. \tag{3.23}$$

式中，α' 是弦张力系数，φ 是标量真空场，H 是修正的 Kalb-Ramond 场强，它可以由 Yang-Mills-Chern-Simons3-形式 ω_{3Y}和 Lorentz 群 Chern-Simons3-形式 ω_{3L}表示，即[18]：

$$H = \mathrm{d}B - \omega_{3Y} + \omega_{3L},$$

$$\omega_{3Y} = \mathrm{tr}(AF - \frac{1}{3}A^3),$$

$$\omega_{3L} = \mathrm{tr}(\omega R - \frac{1}{3}\omega^3). \tag{3.24}$$

对于四维超弦模型，同样选择球对称度规和如下轴子场强：

$$H = h(t)\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3.25}$$

于是由轴子场守恒方程 $\mathrm{d}H^* = \mathrm{d}H = 0$ 可导出：

$$h(t) = \frac{n}{f^2 a^2}. \tag{3.26}$$

这里 f 是与弦模型有关的参量，$\mathrm{d}H = 0$ 等价于规范反常和引力反常相抵消的条件 $\mathrm{tr}R^2 = \mathrm{tr}F^2$. 所以我们即可得到 S^3 上的量子化轴子场：

$$\int_{S^3} H = \frac{2\pi n^2}{f^2}. \tag{3.27}$$

对于具体的超弦模型，可算出参量 f 的值. 例如对于 $SO(32)$超弦，$\Pi_7(SO(32)) \cong \mathbb{Z}$，那么(3.27)式中合适的系数 f 可由整体反常和 Atiyah-Singer 指标定理导出[19]，这时，

$$\int_{S^3} H = 2\pi^2(n + \delta)/75. \tag{3.28}$$

其中 δ 与 n 无关，但与度规和流形上的规范场有关. 当 $\delta = 0$ 时，就得到 $f^2 = 75$. 现在假定标量真空场 φ 与时间无关，即

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3.29}$$

根据(3.26)和(3.29)式，则可导出标度因子 a 满足的 Einstein 场方程：

$$3(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{a^2}) = - 3\mathrm{e}^{\beta\varphi} \cdot \frac{n^2}{f^2 a^6} - 2\Lambda. \tag{3.30}$$

将上述方程变形后即得：

$$(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t})^2 = 1 - \frac{r_n^2}{a^4} - \frac{2}{3}\Lambda a^2, \tag{3.31}$$

这里 $r_n^2 = \frac{\mathrm{e}^{\beta\varphi} \cdot n^2}{f^2}$是超弦蛀洞参量. 与场方程(3.20)作一比较后可以发现，(3.31)中缺少了形如$\frac{1}{a^2}$的项. 这是由于 Yang-Mills 场强 F 和引力标量曲率 R 相抵消的缘故，所以只需在场方程(3.20)中将蛀洞参量作相应的代换后，那么(3.31)的解就会与(3.20)的解(即(3.22))在形式上保持一致. 所以这里讨论的超弦蛀洞解可看作是一般的 Yang-Mills-Kalb-Ramond 蛀洞解的一个特例.

事实上，这里所分析的 Yang-Mills 蛀洞解还有较丰富的拓扑含义. 对于球对称度规，Chern-Simons 电荷则定义为[20]

$$Q = \int_{S^3} \omega_{\mathrm{CS}}, \tag{3.32}$$

其中 ω_{CS}是 Chern-Simons 3-形式:

$$\omega_{CS} = \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}(AdA + \frac{2}{3}A^3). \tag{3.33}$$

简单计算表明 $Q=\frac{1}{2}$,所以 Hosoya 和 Ogura 的解又称为“半子”(meron)蛀洞解. 由于蛀洞喉具有有限的宽度,因此半子中心的奇异性可能得到避免,同时,Pontryagin 拓扑数(或瞬子密度)可表示为:

$$d\omega_{CS} = \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}(F^2). \tag{3.34}$$

由于蛀洞存在两个边界:蛀洞颈(neck)和最大半径,而来源于这两个边界上的拓扑数的绝对值都为$\frac{1}{2}$,所以两个表面项抵消后得到处处为零的 Pontryagin 密度. 本文考虑了 Kalb-Ramond 场的耦合,使蛀洞的几何结构发生了变化,所以有必要研究这些蛀洞解中拓扑数分布的情况. 当然,这些蛀洞解的深刻的拓扑含义还有待进一步揭示.

四、讨论

最近,Carlip 和 de Alwis 讨论了 baby 宇宙中的三维 Chern-Simons 蛀洞模型[21],他们仔细分析了具有 $SL(2,\mathbb{R})$规范场和宇宙项作用的蛀洞配分函数的连通性质,但他们的模型与本文所讨论的三维蛀洞解的关系还不清楚. 此外,由于超对称和超弦模型中都要求包括费米子的贡献,因此还有必要研究费米子在蛀洞模型和 baby 宇宙中的意义. Hosoya 和 Rey 等人考虑了蛀洞背景下 $SU(2)$规范场与 Dirac 费米子的耦合,并获得了相应的波函数. 将他们的结果推广到具有 Kalb-Ramond 场耦合的 Yang-Mills 蛀洞模型和超弦蛀洞模型,无疑将是一件有意义的工作.

参考文献

[1] M. J. Perry, Gravitational Instantons, Seminar on Differerential Geometry, Edited by S. T. Yau, Princeton University Press—(1982).

[2] D. J. Gross, *Nucl. Phys.*, **B236**(1984),349.

[3] S. B. Giddings and A. Strominger, *Nucl. Phys.*, **B306**(1988),890.

[4] S. Coleman, *Nucl. Phys.*, **B310**(1988),643. S. L. Adler, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989)373; J. Polchinski, *Phys. Lett.*, B219(1989)251.

[5] I. V. Volovich, *Phys. Lett.*, **B219**(1989),66.

[6] 颜骏,胡诗可,高能物理与核物理,**10**(1991),890.

[7] A. Strominger, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1733; G. V. Lavrelashvili, V. A. Rubakov and P. G. Tinyakov, *Mod. Phys. Lett.*, **A13**(1988),1213.

[8] S. B. Giddings and A. Strominger, *Nucl. Phys.*, **B321**(1989),481.
A. Strominger, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A329**(1989),395.

[9] R. C. Myers, *Phys. Rev.*, **D38**(1988),1327.

[10] R. C. Myers, *Nucl. Phys.*, **B323**(1989),225.

[11] C. P. Burgess and S. Hagan, *Phys. Rev.*, **D43**(1991),1869.

[12] S. B. Giddings and A. Strominger, *Phys. Lett.*, **B250**(1989),46.

[13] Jun Yan, Jiang Nan Li, Cheng Zhong Wen and Shi Ke Hu, The Wormholes Instanton Solutions in Quantum Gravity and String Theory, Priprint—(1990).

[14] A. K. Gupta, J. Hughes, J. Preskill and M. B. Wise, *Nucl. Phys*, **B333**(1990), 195.

[15] R. Rohm and E. Witten, *Ann. Phys.*, **170**(1986), 454.

[16] W. Fischler and L. Susskind, *Phys. Lett.*, **B217**(1989), 48.

[17] A. Hosoya and W. Ogura, *Phys. Lett.*, **B225**(1989), 117.

[18] Yan Jun, *Chin. Phys. lett.*, **10**(1987), 473.

[19] E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, **100**(1985), 197.

[20] S. J. Rey, *Nucl. Phys.*, **B336**(1990), 146.

[21] S. Carlip and S. P. dealwis, *Nucl. Phys.*, **B337**(1990), 681.

The Non-Abelian Wormholes Solutions in Baby Universe Model

YAN JUN　TAO BIYOU　HU SHIKE

(*Department of Physics, Sichuan University, Chengdu* 610064)

ABSTRACT

In this paper, the general non-Abelian wormholes solutions are obtained in 3D and 4D manifold by adding the contribution of a cosmological constant and a Kalb-Ramond field in baby universe's action.