

2+1 维 $SU(2)$ 规范场真空波函数的红外形式*

陈启洲 李志兵 李 磊 郭硕鸿

(中山大学物理系 广州 510275)

1992 年 7 月 18 日收到

摘 要

本文提出一种确定规范场真空波函数的尝试方法。所得之波函数能有效地描述缓变组态。

关键词 2+1 维, 真空波函数, 规范场, 红外形式。

1 引 言

非阿贝尔规范场的自相互作用使其具有非平庸的物理真空并导致禁闭。多年来关于此真空有很多讨论, 分别从不同的侧面揭示了它的性质。在经典规范场的研究中把它归结为磁单极(或瞬子)的凝聚^[1], 使人们对禁闭机制的认识进了一大步。但为了系统地计算低能强子物理, 人们更希望知道真空波函数的具体形式。若知道真空波函数, 所有定态问题都可以在降低一维的空间中讨论, 低能激发态的能谱可以较可靠地用变分法计算。格点规范理论提供了一个非微扰的理论框架, 据此可系统地研究规范场的基态(即物理真空)。

一般认为大于禁闭尺度的规范场基态是非常无序的^[1-2]。据此, Greensite 提出格点规范场基态的一种可能形式^[3], 认为把真空波函数写成指数上独立元格变量之和是很好的近似。

Arisue 等用变分法计算了此形式基态的参数及两元格关联的修正^[4]。最近我们也用同样的方法考察了若干不同算符的贡献, 结论与 [4] 一致, 即对独立元格波函数的修正很小。因为变分法不区别对待缓变组态和高动量组态, 而独立元格波函数仅对前者适用, 故由变分法确定其中参数有不自洽之嫌。

郭硕鸿等在 1985 年指出此形式的波函数是一变形哈密顿量的准确基态^[5], 而该哈密顿量与常用的 K-S 哈密顿量仅差一“无关”算符(在经典意义下)。但后来的研究表明此“无关”算符的量子贡献是不能忽略的(至少对 3+1 维如此), 必须考虑它对参数的重整化

* 国家自然科学基金和中山大学高等学术研究中心资助。

修正^[6]。

因此,虽然人们普遍相信独立元格波函数描述大尺度规范场真空的合理性,但如何确定其中的参数仍然是一个没解决的问题。Greensite 拟合计算机模拟的缓变组态的几率得到的独立元格波函数的参数与变分结果有明显差异^[7,8]。Arisue 最近更细致的工作证实了这一点^[9]。

本文提出的方法基于以下两个假设:(1)波函数的形式是合适的;(2)基态参数主要由缓变的小振幅组态确定。因为有第二个假设,我们称由此得到的波函数为红外形式。本文所考虑的组态是文献[7]中用以拟合 Monte Carlo 结果的均匀组态。

为简单起见,本文仅讨论 2+1 维的情形。因为这种方法无需对组态积分,推广到任意维数并无原则困难。

2 方 法

采用 K-S 哈密顿量(以下将局限于 $SU(2)$ 群)

$$H = \frac{2}{\beta} \left(\sum_l E_l^2 - \frac{\beta^2}{4} \sum_p \text{tr} U_p \right). \quad (1)$$

前文提到的独立元格试探基态为

$$\Phi_0(\mu; U_p) = \exp \left(\frac{\mu}{4} \sum_p \text{tr} U_p \right). \quad (2)$$

我们想做的事情是选择参数 μ 与耦合常数 β 的关系,使(2)式适于描写缓变的组态。为此,考虑下述的均匀组态

$$U_1 = \sqrt{1 - p^2} + i\sigma_1 p, \quad (3a)$$

$$U_2 = \sqrt{1 - p^2} + i\sigma_2 p. \quad (3b)$$

其中下标 1、2 分别代表空间的两个方向; p 是与坐标无关的 $[-1, 1]$ 之间的数,文中假定为小量(小振幅假设)。以下的分析都是对(3)式定义的组态进行的。忽略一个相乘的常数,(2)式写成

$$\Phi_0(\mu, p) \sim \exp(-\mu p^4). \quad (4)$$

我们确定 μ 参数的方法如下。首先选择一个带 K 个参数的试探基态 $\Phi(\mu\mu_1 \cdots \mu_{K-1}; U)$ 。用 H 作用其上并代入均匀组态,得到:

$$[E_l, [E_l, \Phi]] - \frac{\beta^2}{4} \text{tr} U_p \cdot \Phi = \mathcal{E}(\mu\mu_1 \mu_{K-1}; p) \Phi, \quad (5)$$

其中 $\mathcal{E}(\mu\mu_1 \cdots \mu_{K-1}; p)$ 称为本征值。若 Φ 是真正的本征态, \mathcal{E} 与组态 p 无关。因此可选取参数 $\mu\mu_1 \cdots \mu_{K-1}$, 使 \mathcal{E} 中 p 的低次幂不出现。因为 Φ 必须是规范不变的,而包含规范链最少的规范不变量是含有四条链的元格变量,故出现在 \mathcal{E} 中的最低次幂为 p^4 , 其它幂次也是偶的。为了确定 K 个参数,可令 p 的 $2K + 2$ 次幂以下的系数为零,得到 K 个自治方程。由此解出参数后代回波函数中,得到:

$$\Phi(\beta, p) = \Phi(\mu\mu_1 \cdots \mu_{K-1}; p). \quad (6)$$

用(4)式拟合(7)式,得到折合的 μ 参数

$$\mu_{\text{eff}}(\beta) = - \left. \frac{\partial}{\partial p^4} \ln \Phi(\beta, p) \right|_{p=0}. \quad (7)$$

此方案的关键显然在于选择 Φ 的函数形式。一种系统的方法是以(2)式为零级试探基态,用算符 E^2 作用其上,把新增加的规范场不变量乘上相应的参数结合到下一级试探基态中去。如此逐级修正试探基态,是按 β 收敛的。在下一节将给出零级和一级的结果。

要求(2)式是基态的好的近似,必须保证(7)式解出的 μ_{eff} 是实数,即使(2)式没有节点。自治方程组仅使试探波函数尽量接近本征态,并不保证 μ 是实数。事实上当波函数的形式不恰当时, μ 会是复的。

3 零级和一级的计算

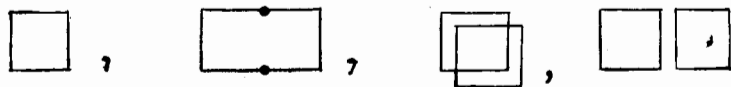
零级试探波函数即(2)式的准本征值为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(0)}(\mu, p) &= - \frac{\beta^2}{4} \text{tr} U_p + \mu [E_i, [E_i, \text{tr} U_p]] + \mu^2 [E_i, \text{tr} U_p] [E_i, \text{tr} U_p] \\ &= - \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2} \mu + (\beta^2 - 3\mu)p^4 - 8\mu^2 p^6 + 8\mu^2 p^8. \end{aligned} \quad (8)$$

让 p^4 的系数为零得

$$\mu_{\text{eff}}^{(0)} = \frac{1}{3} \beta^2. \quad (9)$$

下面计算一级试探波函数。用 E^2 作用于(2)式增加以下一些规范不变量:



$$\square, \quad \text{rectangle with dots}, \quad \text{overlapping squares}, \quad \square \square, \quad (10)$$

一级修正的试探波函数为

$$\Phi(\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = A \exp \left(\frac{\mu}{4} \text{tr} U_p \right), \quad (11a)$$

$$A = 1 + \mu_1 \square + \mu_2 \text{rectangle with dots} + \mu_3 \text{overlapping squares} + \mu_4 \square \square \quad (11b)$$

我们已用了习惯的图形记号并省略了求和号。准本征值由下式给出:

$$\frac{\beta}{2} H \Phi = \mathcal{E}^{(1)} \Phi = \mathcal{E}^{(1)} A \Phi_0, \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(1)} A &= 3[2\mu_1 + 3\mu_2 + 8(\mu_3 + \mu_4)] - 4(3\mu_1 + 18\mu_2 + 32\mu_3 + 22\mu_4)p^4 \\ &\quad + 8(9\mu_2 - 2\mu_4)p^6 + 8(16\mu_3 + 13\mu_4)p^8 - 16\mu p^6 \mu_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) - [\mu_1 + 10\mu_2 + 4(\mu_3 + \mu_4)]p^2 \\
 & + 2[3\mu_2 - 4(\mu_3 + \mu_4)]p^4 + 8(\mu_3 + \mu_4)p^6 \\
 & + \frac{1}{2}(3\mu - \beta^2)(1 - 2p^4)A - 2\mu^2(p^6 - p^8)A.
 \end{aligned} \tag{12b}$$

记 $\mathcal{E}^{(1)}(p=0) = \mu_0$, 比较 (12b) 式 p^{12} 以下各次幂的系数得下列自洽方程组:

$$\begin{aligned}
 p^0: \quad & 6\mu_1 + 9\mu_2 + 24(\mu_3 + \mu_4) + \frac{1}{2}(3\mu - \beta^2)[1 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 4(\mu_3 + \mu_4)] \\
 & = [1 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 4(\mu_3 + \mu_4)]\mu_0,
 \end{aligned} \tag{13a}$$

$$\begin{aligned}
 p^4: \quad & 3\mu_1 + 18\mu_2 + 32\mu_3 + 22\mu_4 + \frac{1}{2}(3\mu - \beta^2)\left[\frac{1}{2} + 2\mu_1 + 5\mu_2 + 6(\mu_3 + \mu_4)\right] \\
 & = [\mu_1 + 4(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)]\mu_0,
 \end{aligned} \tag{13b}$$

$$\begin{aligned}
 p^6: \quad & 9\mu_2 - 2\mu_4 - 2\mu[\mu_1 + 4(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)] - \frac{\mu^2}{4}[1 + 2(\mu_1 + \mu_2) + 4(\mu_3 + \mu_4)] \\
 & + (\mu - \beta^2)\mu_2 = 2\mu_2\mu_0,
 \end{aligned} \tag{13c}$$

$$\begin{aligned}
 p^8: \quad & 16\mu_3 + 13\mu_4 + 2\mu[\mu_1 + 10\mu_2 + 4(\mu_3 + \mu_4)] + \frac{\mu^2}{4}[1 + 2(\mu_1 + \mu_2) \\
 & + 4(\mu_3 + \mu_4)] + \frac{1}{2}(3\mu - \beta^2)[\mu_1 + 4\mu_2 + 6(\mu_3 + \mu_4)] \\
 & = 2(\mu_3 + \mu_4)\mu_0,
 \end{aligned} \tag{13d}$$

$$p^{10}: \quad \mu[3\mu_2 - 4(\mu_3 + \mu_4)] - \frac{\mu^2}{4}[\mu_1 + 4(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)] + \frac{1}{2}(3\mu - \beta^2)\mu_2 = 0, \tag{13e}$$

$$p^{12}: \quad \left[\mu + \frac{1}{8}(3\mu - \beta^2) + \frac{\mu^2}{4}\right](\mu_3 + \mu_4) + \frac{\mu^2}{4}\left(2\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_1\right) = 0. \tag{13f}$$

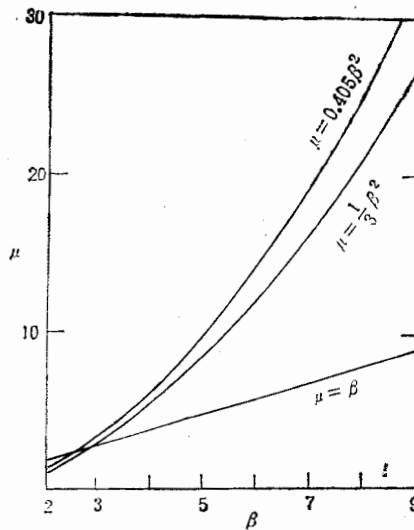


图 1

右端自上而下分别为 Monte Carlo 结果^[7], 本文结果和变分结果.

根据 (7) 式折合出独立元格波函数的等效参数

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \frac{4[\mu_1 + 4(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)]}{1 + 2(\mu_1 + \mu_2) + 4(\mu_3 + \mu_4)}, \quad (14)$$

所得结果见诸于附表和图 1.

我们还计算过如下形式的波函数:

附表 一级试探波函数的参数和折合的独立元格波函数参数 (μ_{eff})

β	2.5	3.2	4.0	4.8	5.6	6.4	7.2	8.0
μ_1	-0.0543	-0.0395	-0.0323	-0.0282	-0.0257	-0.0241	-0.0229	-0.0221
μ_2	-0.0001	-5×10^{-5}	-2×10^{-5}	-1×10^{-5}	-5×10^{-6}	-3×10^{-6}	-2×10^{-6}	-1×10^{-6}
μ_3	0.3063	0.9804	2.399	4.976	9.219	15.73	25.19	38.39
μ_4	-0.3016	-0.9757	-2.394	-4.971	-9.214	-15.72	-25.19	-38.39
μ	2.140	3.575	5.466	7.797	10.56	13.75	17.38	21.43
μ_{eff}	1.982	3.486	5.408	7.758	10.53	13.73	17.36	21.41

$$\Phi(\mu\mu; U) = \exp \left\{ \frac{\mu}{4} \text{tr} U_\rho + \frac{\mu'}{4} [E_l, \text{tr} U_\rho][E_l, \text{tr} U_\rho] \right\}. \quad (15)$$

发现拟合出来的 μ_{eff} 有虚部(在感兴趣的 β 范围), 故此形式不适于作基态波函数的试探解.

4 结果讨论

零级的结果与 [5] 完全相同. 在 [5] 中, 通过要求变形哈密顿量与 K-S 哈密顿量有相同的经典连续极限来确定 μ 参数. 此结果正比于 β^2 的行为与 Monte Carlo 结果([7]: $\mu = 0.405\beta^2$; [9]: $\mu = 0.455\beta^2$) 和 [6] 中的标度分析一致, 但比例因子较 Monte Carlo 结果小约 25%, 后者在拉氏格点理论形式下进行, 可能是造成与我们结果有差异的一个原因.

在一级试探波函数中引入了两元格关联算符, 比例因子略有增大 ($\mu_{\text{eff}}/\beta^2 \sim 0.337$). 从附表可见, 对零级波函数的主要修正来自 μ_1 项, 它在整个区域都是不大的. 相比之下, μ_2 的贡献完全可以忽略. μ_3 和 μ_4 的贡献抵消, 也只给出很小的修正. 由此可见, 对所研究的均匀组态来说, 指数独立元格形式的波函数是基态波函数的很好近似, μ_{eff} 很好地满足标度关系.

作为比较, 目前已知的变分结果在弱耦合区基本上正比于 β , 明显小于上述结果. 由此可见, 在给定变分空间中, 变分确定的波函数虽然对应能量最低的(最接近基态能量的)状态, 但此状态不一定最适合于描写特定组态(如物理上感兴趣的低动量组态)在基态的行为. 我们的方法和 [7-9] 中的 Monte Carlo 方法是建立在几率拟合的基础上的, 即在给定的波函数形式中找出最能描写缓变组态的几率分布的波函数. 由此得到的波函数对应的能量显然会大于变分的结果. 但真空能量是不可观测量, 增加的部分来源于高动量组态的贡献, 在低能激发态的计算中可望自动减除掉.

为了进一步研究独立元格基态波函数的适用范围,除了这里所考虑的均匀组态外,还需研究其它缓变组态,如[8,9]中所讨论的长波组态等。 这些问题尚有待进一步研究。

参 考 文 献

- [1] S. Mandelstam, *Phys. Repts.*, **Vol. 23** (1976) 245; A. M. Polyakov, *Nucl. Phys.*, **B120**(1977)429; J. Greensite, *Nucl. Phys.*, **B158**(1979)469.
- [2] M. B. Harlpern, *Phys. Rev.*, **D19**(1979)517; R. P. Feynman, *Nucl. Phys.*, **B188**(1981) 479.
- [3] J. Greensite, *Nucl. Phys.*, **B166**(1980)113.
- [4] H. Arisue, M. Kato and T. Fujiwara, *Prog. of Theor. Phys.*, **70**(1983)229.
- [5] Guo Shuohong, Liu Jinming and Chen Qizhou, *Chinese Phys. Lett.*, **2**(1985)405; Guo Shuohong, Zheng Weihong and Liu Jinming., *Phys. Rev.*, **D38**(1988)2591.
- [6] Guo Shuohong, Zheng Weihong, Liu Jinming. and Li Zhibing, *Phys. Rev.*, **D44**(1991)1269.
- [7] J. Greensite, *Phys. Lett.*, **B191**(1987)431.
- [8] J. Greensite, *Phys. Lett.*, **B223**(1989)207.
- [9] H. Arisue, preprint, OPCT 92-1, January 1992.

Infrared Vacuum Wavefunction of (2+1)-Dimensional $SU(2)$ Gauge Field

Chen Qizhou Li Zhibing Li Lei Guo Shuohong

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Received on July 18, 1992

Abstract

We propose a new method for determining the vacuum wavefunction of gauge field. The wavefunction so obtained is efficient in describing the slow varying configurations.

Key Words 2 + 1 dimension, Vacuum wavefunction, Gauge field, infrared form.