第 18 卷 第 10 期 高能物理与核物理 Vol. 18, No. 10
1994 年 10 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct., 1994

# 活动标架系下 $O(n)$ 非线性 $\sigma$ 模型 Lax pair 矩阵的 Poisson–Lie 结构

王延申　　侯伯宇
（西北大学现代物理研究所　西安　710069）

1993 年 6 月 28 日收到


## 摘　　要

在活动标架系下给出了 $O(n)/O(n-1)$ 对称空间上非线性 $\sigma$ 模型的 Poisson-Lie 括号，并用协变分解的方法讨论了活动标架与固定标架系的协变关系，得到的 $r$、$s$ 矩阵可以明显地看出其依赖于场量的部分是由于 $S^{n-1}$ 流形上的联络引起的。


**关键词**　非线性 $\sigma$ 模型，对称空间，Poisson-Lie 括号。

在过去几十年中，人们对二维可积场论的结构了解越来越深：许多二维场模型被建立起来，非线性 $\sigma$ 模型就是其中之一。非线性 $\sigma$ 模型在理论物理中有着广泛的应用，它是一种可积二维非超定域模型，其相互作用不是靠对自由场拉氏量外加相互作用部分，而是靠几何方法由流形度规所决定的联络与曲率引入[1,6]。其相互作用特征在很多方面与非 Abel 规范理论类似，例如，有渐近自由，具有非平庸拓扑结构，有孤子解等。它在 Riemann 对称空间上的正则结构已被 J-M. Maillet 等人在固定标架下详细地讨论了[2,3]，它的 Lax pair 空间分量 $a_1$ 的 Poisson-Lie 括号是非超定域型的，即存在 $\delta(x-y)$ 的一阶空间微商项，这样 $a_1$ 的 Poisson-Lie 括号就由 $s$ 和 $r$ 这两个对称和反对称的矩阵来决定。本文将用协变分解的方法在活动标架系下给出 $O(n)$ 非线性 $\sigma$ 模型的 Lax pair 空间分量 $a_1$ 矩阵的 Poisson-Lie 括号，得到的 $r$、$s$ 矩阵可以清楚地看出除了流形联络以外不依赖于场量。

## 1　固定标架下的 $O(n)$ 非线性 $\sigma$ 模型

在 1+1 维空间 $(x_\mu, \mu=0,1)$ 中的 $O(n)$ 非线性 $\sigma$ 模型的场量为 $s_i(x)(i=1,2,\cdots n)$，满足约束

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^2(x)=1, \tag{1.1}$$

它是 $n$ 维空间中 $n-1$ 维球面上的一点。可以写成列矢 $|s\rangle=\sum_{i=1}^{n} s_i|i\rangle$，其对偶可写为

行矢 $\langle s| = \sum_{i=1}^{n} \langle i| s_i$，其中，

$$|i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \langle i| = (0, 0, \cdots 1, \cdots 0).$$

由(1.1)可知

$$\langle S|S\rangle = 1. \tag{1.2}$$

令　$P = |s\rangle\langle s|$，其为一个 $n \times n$ 矩阵，具有性质

$$P \cdot P = P. \tag{1.3}$$

该模型的动力学由拉氏量 $L$ 所决定[2,4,5]，

$$L = \frac{1}{8} \mathrm{Tr}(\partial_\mu N(x) \partial^\mu N(x)), \tag{1.4}$$

其中 $N(x) = \exp(i\pi p) = 1 - 2p = N(x)^{-1}$，

所以

$$N \cdot N = 1. \tag{1.5}$$

微分上式可得，

$$[\partial_\mu N, N]_+ = 0, \tag{1.6}$$

其中$[\,,]_+$代表反对易括号。

由于 $|s\rangle$ 取值在对称空间上，所以任意两个场量 $|s\rangle$ 和 $|s'\rangle$ 可以通过一个矩阵 $g \in SO(n)$ 来联系起来，

$$|s'\rangle = g|s\rangle, \tag{1.7}$$

相应的，

$$N'(x) = gN(x)g^{-1}. \tag{1.8}$$

通过在 $S^{n-1}$ 上 $N(x)$ 的一个任意改变，并考虑到(1.5)式，用拉氏乘子的方法由(1.4)式得到$N$所满足的运动方程，

$$[\partial_\mu \partial^\mu N(x), N(x)] = 0. \tag{1.9}$$

同时拉氏量(1.4)式还具有一个整体 $SO(n)$ 对称，所以存在一个守恒的 Nöether 流

$$J_\mu = \mathrm{Tr}(K_\mu T), \tag{1.10}$$

其中

$$K_\mu = -\frac{1}{2} N \partial_\mu N, \tag{1.11}$$

$$T \in SO(n), \ T = c_{ab} T_{ab} \ (1 \leqslant a < b \leqslant n).$$

$c_{ab}$ 是常数，$T_{ab} = E_{ab} - E_{ba}$，

$$(E_{ab})_{ij} = \delta_{ai} \delta_{bj}.$$

因为 $\partial_\mu T = 0$，所以 $\partial_\mu K^\mu = 0$.　(1.12)

该模型的作用量为[2]

$$\mathscr{S} = -\frac{1}{4} \int d^2 x \, \mathrm{tr}(K_\mu K^\mu) = \frac{1}{2} \int d^2 x \, \partial_\mu s_a \partial^\mu s_a, \tag{1.13}$$

选择 $s_a$ 为正则坐标，相应的正则动量为

$$\pi_a = \partial_0 s_a. \tag{1.14}$$

由于约束条件(1.1)，可利用 Dirac 的方法定义一个正则结构[2]，其 Hamiltonian 为

$$H = \frac{1}{2}\int dx[\pi_a\pi^a + \partial_x s_a \partial^x s_a], \tag{1.15}$$

及 Dirac 括号

$$\begin{aligned}
&\{s_a(x), s_b(y)\}_D = 0;\\
&\{s_a(x), \pi_b(y)\}_D = (\delta_{ab} - n_a n_b)(x)\delta(x-y);\\
&\{\pi_a(x), \pi_b(y)\}_D = (\pi_a n_b - \pi_b n_a)(x)\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

因为 $K_\mu$ 是守恒的，且满足零曲率方程

$$\partial_0 K_1 - \partial_1 K_0 - 2[K_0, K_1] = 0,$$

所以可以构造一个线性系统，其 Lax pair 空间分量为[3]：

$$a_1 = \frac{-2K_1 - 2\lambda K_0}{1-\lambda^2}. \tag{1.17}$$

$K_\mu$ 的泊松括号为[3]：

$$\begin{aligned}
&\{K_0(x) \underset{,}{\otimes} K_0(y)\} = \delta(x-y)[1\otimes K_0(x), C];\\
&\{K_1(x) \underset{,}{\otimes} K_1(y)\} = 0;\\
&\{K_0(x) \underset{,}{\otimes} K_1(y)\} = \delta(x-y)[1\otimes K_1(x), C] + J(y)\delta'(x-y).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

其中 $C$ 为 $O(n)$ 的 Casimir 张量，

$$C = T^{ab}\otimes T_{ab} = -\frac{1}{2}\sum_{a<b=2}^{n} T_{ab}\otimes T_{ab}. \tag{1.19}$$

由(1.18)式可得到 $a_1(x,\lambda)$ 的 Poisson-Lie 括号：

$$\begin{aligned}
&\{a_1(x,\lambda) \underset{,}{\otimes} a_1(y,\mu)\}\\
&= \left[\frac{2C}{\lambda-\mu}, \frac{\mu^2}{1-\mu^2} a_1(x,\lambda)\otimes\Big| + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\Big|\otimes a_1(y,\mu)\right]\delta(x-y)\\
&\quad - \frac{2(\lambda-\mu)}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}(J(x) - J(y))\delta'(x-y)\\
&\quad + \frac{2(\lambda+\mu)}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}(J(x) + J(y))\delta'(x-y)\\
&= r'(x;\lambda,\mu)\delta(x-y)\\
&\quad - [r(x;\lambda,\mu), a_1(x,\lambda)\otimes| + |\otimes a_1(y,\mu)]\delta(x-y)\\
&\quad + [s(x;\lambda,\mu), a_1(x,\lambda)\otimes| - |\otimes a_1(y,\mu)]\delta(x-y)\\
&\quad - (s(x;\lambda,\mu) + s(y;\lambda,\mu))\partial_x\delta(x-y),
\end{aligned} \tag{1.20}$$

其中

$$s(x;\lambda,\mu) = -\frac{2(\lambda+\mu)}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}J(x);$$

$$r(x;\lambda,\mu) = -\frac{2\lambda\mu}{(1-\lambda\mu)(\lambda-\mu)}C - \frac{2(1+\lambda\mu)(\lambda-\mu)}{(1-\lambda\mu)(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}J(x). \tag{1.21}$$

## 2　活动标架系的建立

当场量 $|s\rangle$ 在 $g\in SO(n)$ 的作用下有一个变动

$$|s\rangle\to|s^g\rangle=g|s\rangle \tag{2.1}$$

时，$N(x)$，$K_\mu(x)$ 有如下变动[4,6]：

$$N\to N^g=gNg^{-1};$$
$$K_\mu\to K_\mu^g=-\frac{1}{2}N^gD_\mu^gN^g=gK_\mu g^{-1}. \tag{2.2}$$

其中 $D_\mu^g$ 为协变微分算子：

$$D_\mu^g=\partial_\mu+[A_\mu^g,].$$

$A_\mu^g$ 是一个纯规范势

$$A_\mu^g=g\partial_\mu g^{-1}, \tag{2.3}$$

它可被分成两部分之和[4,6]：

$$A_\mu^g=K_\mu^g+H_\mu^g, \tag{2.4}$$

当 $g\to hg$ 时，

$$A_\mu^g\to A_\mu^{hg}=hA_\mu^gh^{-1}+h\partial_\mu h^{-1}=K_\mu^{hg}+H_\mu^{hg},$$

其中 $K_\mu^g$ 是协变的，

$$K_\mu^g\to K_\mu^{hg}=hK_\mu^gh^{-1}, \tag{2.5}$$

而 $H_\mu^g$ 则象 $O(n)$ 联络那样变，

$$H_\mu^g\to H_\mu^{hg}=hH_\mu^gh^{-1}+h\partial_\mu h^{-1}. \tag{2.6}$$

当 $g=1$ 时，由(2.3)，(2.2)，(2.4)知

$$A_\mu^1=0;$$
$$K_\mu^1=K_\mu=-\frac{1}{2}N\partial_\mu N;$$
$$H_\mu^1=-K_\mu=\frac{1}{2}N\partial_\mu N. \tag{2.7}$$

$g=1$ 称为平直规范，在这个规范下，流形上各点的标架是平行的。

也可找到一个 $g^{-1}(x)\in SO(n)$，使

$$g^{-1}|S\rangle=|n\rangle, \tag{2.8}$$

这样，(2.2)式就成为

$$g^{-1}Ng=1-2|n\rangle\langle n|=n. \tag{2.9}$$

$n$ 是对合自同构算子，具有性质：

$$n^2=1;$$
$$[n,T_{ij}]=0,\ (i<j<n);$$
$$[n,T_{in}]_+=0. \tag{2.10}$$

按照(2.10)式，$n$ 把 $SO(n)$ 代数生成元分成两部分，

$$g=h+k. \tag{2.11}$$

其中

$$h=\{T_{ij}\},\ (i<j<n);$$
$$k=\{T_{in}\},\ (i\neq n). \tag{2.12}$$

由 $\{T_{ij},T_{kl}\}=\delta_{il}T_{jk}+\delta_{jk}T_{il}-\delta_{ik}T_{jl}-\delta_{jl}T_{ik}$ 可知

$$[h,h]\subset h;\ [k,k]\subset h;\ [h,k]\subset k. \tag{2.13}$$

(2.3),(2.5),(2.6)分别为

$$a_\mu=A_\mu^{g^{-1}}=g^{-1}\partial_\mu g;$$
$$k_\mu=K_\mu^{g^{-1}}=\frac{1}{2}n[n,g^{-1}\partial_\mu g];$$
$$h_\mu=H_\mu^{g^{-1}}=\frac{1}{2}n[n,g^{-1}\partial_\mu g]_+. \tag{2.14}$$

纯规范势 $a_\mu$ 满足的 Maurer-Cartan 方程

$$\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu+[a_\mu,a_\nu]=0. \tag{2.15}$$

利用(2.13)式,上式可用 $k_\mu,h_\mu$ 表为:

$$\partial_\mu h_\nu-\partial_\nu h_\mu+[h_\mu,h_\nu]+[k_\mu,k_\nu]=0;$$
$$\mathscr{D}_\mu k_\nu-\mathscr{D}_\nu k_\mu=0.$$

其中，$\mathscr{D}_\mu\equiv\partial_\mu+[h_\mu,]$.

在 $g^{-1}$ 规范下，Lax pair 空间分量为[4,6]

$$a_1(x,\lambda)=h_1-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}k_1-\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}k_0. \tag{2.16}$$

下面将利用 $S^{n-1}$ 流形的度规和联络来表达 $k_\mu$ 和 $h_\mu$.

设流形参数为 $\theta^i(i=1,2,\cdots,n-1)$，可得到 $n-1$ 参数活动标架. 在 $S^{n-1}$ 流形的每点 $x$ 选正交标架

$$(x;e_1,e_2,\cdots e_{n-1}),$$

使得度规 $g_{ij}$ 为对角矩阵. 设 $e_n$ 为流形的法向量. 此局域正交标架场称为 $S^{n-1}$ 的 Darboux 标架[5].

$$dx=\sum_{i=1}^{n-1}e_i\omega_i, \tag{2.17}$$

其中 $\omega_i$ 为 1-形式,考虑到度规是对角的，$\omega_i$ 可写为

$$\omega_i=\sqrt{g_{ii}}\,d\theta^i,$$

上式重复指标不求和[1]. 引入流形的第一基本形式

$$I=(dx,dx)=\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i^2,$$

Darboux 标架的运动公式可表为

$$de_i=\sum_{j=1}^{n-1}e_j\omega_{ji}+e_n\omega_{ni}, \tag{2.18}$$

1) 在本文中,没有$\sum$符号,重复指标不求和.

$$de_n = \sum_{j=1}^{n-1} e_j\omega_{jn}. \tag{2.19}$$

(2.17),(2.18),(2.19)诸式的可积条件可表为

$$d\omega_i + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{ij}\wedge\omega_j = 0; \tag{2.20a}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{nj}\wedge\omega_j = 0; \tag{2.20b}$$

$$d\omega_{ij} + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} + \omega_{in}\wedge\omega_{nj} = 0; \tag{2.20c}$$

$$d\omega_{in} + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{ik}\wedge\omega_{kn} = 0. \tag{2.20d}$$

由 (2.20b) 及 $\{\omega_i\}$ 的线性无关性,

$$\omega_{ni} = \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij}\omega_j,\quad h_{ij} = h_{ji},$$

可引入超曲面的第 II 基本形式

$$\mathrm{II} = -(dx, de_n) = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}\omega_i\omega_j.$$

对 $S^{n-1}$ 流形,因为 $dx = de_n$, 所以

$$h_{ij} = -\delta_{ij},$$

所以

$$\omega_{in} = -\omega_{ni} = \omega_i. \tag{2.21}$$

因为 $\omega_{ij}(i,j\neq n)$ 也是 1-形式，故可用 $\omega_i$ 来展开

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^k\omega_k. \tag{2.22}$$

由 (2.20a) 可知 $\Gamma_{ij}^k = 0$, 当 $k\neq i$ 或 $j$ 时,所以

$$\omega_{ij} = \Gamma_{ij}^i\omega_i + \Gamma_{ij}^j\omega_j. \tag{2.23}$$

(2.8)式可写为 $g^{-1}|e_n\rangle = |n\rangle$, 该式可推广为

$$g^{-1}|e_i\rangle = |i\rangle,\ (i = 1,2,\cdots,n). \tag{2.24}$$

微分上式并利用(2.18)式,可得到

$$g^{-1}dg = \sum_{a<b=2}^{n} \omega_{ab}T_{ab},$$

把此式代入(2.14)并利用(2.10)可知

$$k_\mu dx^\mu = \sum_{a=1}^{n-1} \omega_{an}T_{an};$$

$$h_\mu dx^\mu = \sum_{a<b=2}^{n-1} \omega_{ab}T_{ab}. \tag{2.25}$$

所以

$$k_\mu = \sum_{a=1}^{n-1} \sqrt{g_{aa}}\, \partial_\mu \theta^a T_{an} = \sum_{a=1}^{n-1} k_\mu^a T_{an};$$

$$h_\mu = \sum_{a<b=2}^{n-1} (\Gamma^a_{ab} \sqrt{g_{aa}}\, \partial_\mu \theta^a T_{ab} + \Gamma^b_{ab} \sqrt{g_{bb}}\, \partial_\mu \theta^b T_{ab}). \tag{2.26}$$

作用量为

$$s = -\frac{1}{4}\int d^2x \mathrm{Tr}\,(k_\mu k^\mu) = \frac{1}{2}\int d^2x \sum_{a=1}^{n-1} g_{aa}\partial_\mu\theta^a\partial^\mu\theta^a, \tag{2.27}$$

选取 $\theta^a$ 为正则坐标,对应的正则动量为

$$\pi_a = g_{aa}\partial_0\theta^a, \tag{2.28}$$

并且有

$$\{\theta^a(x), \pi_b(y)\} = \delta^a_b\delta(x-y). \tag{2.29}$$

若用正则坐标和正则动量来表达 $k_0$, 则为

$$k_0 = \sum_{a=1}^{n-1} \sqrt{g^{aa}}\ \pi_a T_{an}, \tag{2.30}$$

其中 $g^{aa}$ 是度规 $g_{ij}$ 的逆矩阵元.

当 $K_\mu \to k_\mu = g^{-1}K_\mu g$ 时,

$$\begin{aligned}
\{k_0 \underset{,}{\otimes} k_0\} &= g^{-1}\otimes g^{-1}\{K_0 \underset{,}{\otimes} K_0\} g\otimes g + [k_0\otimes 1, g^{-1}\otimes 1\{g \underset{,}{\otimes} k_0\}] \\
&\quad + [1\otimes k_0, 1\otimes g^{-1}\{k_0 \underset{,}{\otimes} g\}]; \\
\{k_0 \underset{,}{\otimes} k_1\} &= g^{-1}\otimes g^{-1}\{K_0 \underset{,}{\otimes} K_0\} g\otimes g + [1\otimes k_1, 1\otimes g^{-1}\{k_0 \underset{,}{\otimes} g\}]; \\
\{k_0 \underset{,}{\otimes} h_1\} &= g^{-1}\otimes g^{-1}\{K_0 \underset{,}{\otimes} H_1\} g\otimes g + [1\otimes h_1, 1\otimes g^{-1}\{k_0 \underset{,}{\otimes} g\}] \\
&\quad + \partial_y(1\otimes g^{-1}\{k_0 \underset{,}{\otimes} g\}).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

因为

$$\begin{aligned}
1\otimes g^{-1}\{k_0 \underset{,}{\otimes} g\} &= -\sum_{a=1}^{n-1} \sqrt{g^{aa}}\ T_{an}\otimes g^{-1}\partial_a g \\
&= -\sum_{a=1}^{n-1} T_{an}\otimes T_{an} - \sum_{a,c=1}^{n-1} \Gamma^a_{ac} T_{an}\otimes T_{ac} - \sum_{a,c=1}^{n-1} \Gamma^a_{ca} T_{an}\otimes T_{ca},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

把(2.32)代入(2.31)中可得

$$\{k_0 \underset{,}{\otimes} k_0\} = [1\otimes h_0, j]\delta(x-y); \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
\{k_0 \underset{,}{\otimes} k_1\} &= \left(\sum_{a,b=1}^{n-1} \Gamma^b_{ab} k_1^b T_{an}\otimes T_{bn} - \sum_{a,b=1}^{n-1} \Gamma^a_{ba} k_1^b T_{an}\otimes T_{an}\right)\delta(x-y) \\
&\quad + j\delta'(x-y);
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\{k_0 \underset{,}{\otimes} h_1\} = \sum_{a,i,j} [(\Gamma^i_{ia}\Gamma^a_{ai} - \Gamma^a_{ia}\Gamma^i_{aj})k_1^a + \Gamma^a_{ia}\Gamma^i_{aj}(k_1^i - k_1^j)] T_{an}\otimes T_{ij}\delta(x-y)$$

$$+\sum_{i,j}(\Gamma^i_{ik}\Gamma^i_{kj}-1)k^i_1 T_{in}\otimes T_{ij}\delta(x-y)$$

$$+\sum_{i,j}(1-\Gamma^i_{ik}\Gamma^i_{kj})k^i_1 T_{jn}\otimes T_{ij}\delta(x-y)$$

$$+\sum_{i,j}(\Gamma^i_{ij}(x)T_{in}\otimes T_{ij}+\Gamma^i_{ij}(x)T_{jn}\otimes T_{ij})\delta'(x-y). \tag{2.35}$$

其中

$$j=\sum_{i=1}^{n-1}T_{in}\otimes T_{in}.$$

上式的推导中用到了

$$g^{-1}\otimes g^{-1}\cdot C\cdot g\otimes g=C,$$

以及

$$f(x)\delta'(x-y)=f(y)\delta'(x-y)-f'(x)\delta(x-y). \tag{2.36}$$

把以上诸式(2.33)，(2.34)，(2.35)代人(2.16)式中，经过冗长但初等的计算，可以得到 Lax pair 矩阵的空间分量的 Poisson-Lie 结构，

$$\begin{aligned}\{a_1(x,\lambda)\underset{,}{\otimes}a_1(y,\mu)\}&=r'(x,\lambda,\mu)\delta(x-y)\\&-[r(x,\lambda,\mu),L(x,\lambda)\otimes 1+1\otimes L(x,\mu)]\delta(x-y)\\&+[s(x,\lambda,\mu),L(x,\lambda)\otimes 1-1\otimes L(x,\mu)]\delta(x-y)\\&-[s(x,\lambda,\mu)+s(y,\lambda,\mu)]\delta'(x-y),\end{aligned} \tag{2.37}$$

其中

$$\begin{aligned}r(x,\lambda,\mu)=&\frac{4\lambda\mu}{(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu)}C-\frac{(\lambda-\mu)(1+\lambda\mu)^2}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)(1-\lambda\mu)}j\\&+\sum_{i<j=2}^{n-1}\Gamma^i_{ij}(x)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2}T_{in}\otimes T_{ij}-\frac{\mu}{1-\mu^2}T_{ij}\otimes T_{in}\right)\\&+\sum_{i<j=2}^{n-1}\Gamma^i_{ij}(x)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2}T_{jn}\otimes T_{ij}-\frac{\mu}{1-\mu^2}T_{ij}\otimes T_{jn}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s(x,\lambda,\mu)=&-\frac{(\lambda+\mu)(1+\lambda\mu)}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}j\\&+\sum_{i<j=2}^{n-1}\Gamma^i_{ij}(x)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2}T_{in}\otimes T_{ij}+\frac{\mu}{1-\mu^2}T_{ij}\otimes T_{in}\right)\\&+\sum_{i<j=2}^{n-1}\Gamma^i_{ij}(x)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2}T_{jn}\otimes T_{ij}+\frac{\mu}{1-\mu^2}T_{ij}\otimes T_{jn}\right).\end{aligned} \tag{2.38}$$

它们满足“修正的”杨-Baxter 方程：

$$\begin{aligned}&[(r+s)_{23}(\mu,\eta),(r+s)_{12}(\lambda,\mu)]+[(r+s)_{23}(\mu,\eta),(r+s)_{13}(\lambda,\eta)]\\&\quad+[(r+s)_{13}(\lambda,\eta),(r-s)_{12}(\lambda,\mu)]\\&\quad+H^{(r+s)}_{1,23}(\lambda,\mu,\eta)-H^{(r+s)}_{2,13}(\mu,\lambda,\eta)=0.\end{aligned} \tag{2.39}$$

# 3 讨 论

我们现在把这个结果同 Forger 等人[3]在固定标架下得到的 $r$、$s$ 矩阵(1.21)式相比较。当 $K_\mu$ 和 $H_\mu$ 经过 $g^{-1}$ 变换到 $k_\mu$ 和 $h_\mu$ 时，Lax pair 空间分量 $a_\mu$ 也做如下规范变换

$$a_\mu^g = g^{-1}a_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g, \tag{3.1}$$

$r$、$s$ 矩阵将按以下方式变换[7]

$$\begin{aligned} r \to r^g = & g^{-1}\otimes g^{-1}\cdot r\cdot g\otimes g - \frac{1}{2}(1\otimes g^{-1}\{a_1^g(x,\lambda)\underset{,}{\otimes} g(y)\} \\ & + g^{-1}\otimes 1\{g(x)\underset{,}{\otimes} a_1^g(y,\mu)\}); \\ s \to s^g = & g^{-1}\otimes g^{-1}\cdot s\cdot g\otimes g - \frac{1}{2}(1\otimes g^{-1}\{a_1^g(x,\lambda)\underset{,}{\otimes} g(y)\} \\ & - g^{-1}\otimes 1\{g(x)\underset{,}{\otimes} a_1^g(y,\mu)\}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

因为

$$\begin{aligned} 1\otimes g^{-1}\{a_1^g(x,\lambda)\underset{,}{\otimes} g(y)\} &= -\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}1\otimes g^{-1}\{k_0\underset{,}{\otimes} g\}; \\ g^{-1}\otimes 1\{g(x)\underset{,}{\otimes} a_1^g(y,\mu)\} &= -\frac{2\mu}{1-\mu^2}g^{-1}\otimes 1\{g\otimes k_0\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

把(3.3)式代入，可以算得 $r^g$ 和 $s^g$ 就是(2.38)式的 $r$ 和 $s$。这样，通过一个规范变换，在活动标架系下表示 $r$、$s$ 矩阵的(2.38)式，可以明显地看出 $r$、$s$ 矩阵依赖于场量是由于场流形的联络引起的，所以不可能通过规范变换把 $r$、$s$ 矩阵表示成不依赖于场量的形式。

本文作者之一王延申感谢侯伯元教授给予的热情指导。

## 参 考 文 献

[1] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **59B**(1975)79;
M. Lüscher, *Nucl. Phys.*, **B135**(1978)1;
M.Lüscher and K. Pohlmeyer, *Nucl. Phys.*, **B137**(1978)46;
H. Eichenherr and M. Forger, *Nucl. Phys.*, **B155**(1979)381;
H. de. Vega, *Phys. Lett.*, **87B**(1979)233.
[2] J.M. Maillet, *Phys. Lett.*, **162B**(1985)137;
J.M. Maillet, *Nucl. Phys.*, **B269**(1986)54.
[3] H. Eichenherr, M.Forger, *Nucl. Phys.*, **B164**(1980)528;
M. Forger, M. Bordemann, J.Laartz, U. Schäper, The Lie-Poisson Structure of Integrable Classical Non-Linear Sigma Models. Freiburg University preprint THEP 91/11.
[4] Boyu Hou, Boyuan Hou and Pei Wang, *J.Phys. A. Math. Gen.*, **18**(1985)165.
[5] E. Brézin et al., *Phys. Lett.*, **82B**(1979)442.
[6] 侯伯元、侯伯宇，物理学家用微分几何，(1990)，科学出版社，220.
[7] 王延申、杨文力、杨焕雄、侯伯宇，物理学报，**43**(1994)175；**43**(1994)185.

# The Poisson-Lie Structure of $O(n)$ Non-Linear Sigma Model in Moving Frames

Wang Yanshen  Hou Boyu

*(The Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069)*

Received on June 28, 1993

Abstract

The Poisson-Lie structure of non-linear $\sigma$-model is given in $O(n)/O(n-1)$ symmetry space, and the covariant relation between moving frame and fixed frame is discussed using the method of covariant decomposition. It is clear that the field dependence of the $r$ and $s$ matrices results from the connection of $S^{n-1}$ manifold.

**Key words** non-linear $\sigma$ model, symmetric space, Poisson-Lie bracket.