

在弛豫时间近似下 QGP 中夸克 输运系数的一种计算*

白 鸽

(华中师范大学物理系 武汉 430070)

李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430070)
1994-11-04 收稿

摘 要

从动力论方程出发,考虑 QGP 中平均场效应,采用弛豫时间近似,给出了关于 QGP 输运系数的一种分析方法,推导出 QGP 中夸克输运系数解析式,讨论了 QGP 粘滞效应与导热效应。

关键词 夸克胶子等离子体,输运系数,动力论方程。

1 引 言

在近十几年里,对相对论重离子碰撞中产生的高温、高密物质处于夸克胶子等离子体(QGP)相时的平衡过程的研究,已有较深入的工作^[1]。另一方面,对于高温、高密物质处于夸克胶子等离子体相的非平衡过程的研究,近几年来也成为引人注目的研究课题。研究非平衡输运过程的主要任务之一是计算其输运系数。关于 QGP 输运系数的计算已有若干工作。有作者在玻尔兹曼方程中采用弛豫时间近似^[2],以及考虑碰撞项,而不计及色场效应^[3],讨论了 QGP 中夸克输运系数。

在本文中我们从动力论方程出发,考虑 QGP 中色平均场效应,采用弛豫时间近似,给出了 QGP 输运系数的一种分析方法,推导出 QGP 中夸克输运系数解析式,讨论了 QGP 粘滞效应与导热效应。

2 弛豫时间近似下夸克输运系数的解析计算

我们用动力论方程描述 QGP 中夸克的时空演化。动力论方程的形式为^[4]

$$p^\mu \partial_\mu f(x, p) + m F^\mu(x, p) \frac{\partial}{\partial p^\mu} f(x, p) = C(x, p), \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助。

其中 $f(x, p)$ 为夸克的分布函数, F^μ 为作用在夸克上的四度力, m 为夸克的质量.

考虑弛豫时间近似, 碰撞项 $C(x, p)$ 可表示为^[4]

$$C(x, p) = -(f(x, p) - f_{eq}(x, p))/\tau. \quad (2)$$

则动力论方程又可写为

$$p^\mu \partial_\mu f(x, p) + m F^\mu(x, p) \frac{\partial}{\partial p^\mu} f(x, p) = -(f(x, p) - f_{eq}(x, p))/\tau, \quad (3)$$

其中 τ 为夸克系统的弛豫时间, $f_{eq}(x, p)$ 为系统处于局域平衡时的夸克分布函数. $f_{eq}(x, p)$ 的形式为

$$f_{eq}(x, p) = 1/[\exp(\beta(x)p^\mu u_\mu(x) + 1)]. \quad (4)$$

(4)式中的 $\beta(x) = T(x)^{-1}$, $T(x)$ 为系统到达局域平衡时的温度, $u_\mu(x)$ 为夸克的四速度.

从方程(3)可以看出, 方程的解依赖于(4)式中温度 $T(x)$ 的选择. 这里 $T(x)$ 本是系统在局域平衡时的温度, 但由于弛豫时间近似讨论的是系统偏离局域平衡不远时的情况, 因而人们通常就简单地把 $T(x)$ 说成是系统的温度^[5].

QGP 中夸克受其它夸克的作用可以用平均场描述. 注意到 QGP 是处在退禁闭相, 夸克间的位势是德拜型的, 在格点规范理论中蒙德卡洛模拟的结果是^[6]

$$V(r) = C \frac{1}{r^d} e^{-\omega r}, \quad (5)$$

其中 r 为屏蔽半径, ω 为屏蔽质量, d 为屏蔽半径指数, 人们通常将 d 取值 1 或 2. 我们可以用(5)式描述平均场.

于是在弛豫时间近似下, 动力论方程又可表示为

$$(m + \varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + p \cdot \nabla f - m \nabla V \cdot \frac{\partial f}{\partial p} = -(f - f_{eq})/\tau. \quad (6)$$

此方程为我们采用的分布函数 $f(x, p)$ 随时间演化方程, 是分析 QGP 中夸克输运过程的基础.

为了计算输运系数, 需考虑 QGP 中夸克的能量动量张量 $T^{\mu\nu}$, 这可以由分布函数 $f(x, p)$ 来确定^[5],

$$\left. \begin{aligned} T^{00} &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p \varepsilon_p f, \\ T^{0i} &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^i f, \\ T^{ij} &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^i p^j f. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 g 表示夸克内部自由度数.

能量动量张量耗散部分为^[5]

$$T_{diss}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - T_0^{\mu\nu}, \quad (8)$$

其中 $T_0^{\mu\nu}$ 为系统在局域平衡态的能量动量张量.

另一方面, 在局域静止参考系动量密度 T^{0i} 很小, 系统的动量张量耗散部分 T_{diss}^{ij} 为^[5]

$$T_{\text{diss}}^{ij} = -\eta \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) - \left(\xi - \frac{2}{3} \eta \right) \nabla \cdot u \delta^{ij}, \quad (9)$$

其中 u^i 为夸克的三速度, η 为第一粘滞系数, ξ 为第二粘滞系数. 可见, 只要由分布函数求得了 T_{diss}^{ij} , 即可进一步具体求出有关输运系数.

下面求解 QGP 中夸克输运系数. 由(6)式可得到

$$f = f_{\text{eq}} + \delta f, \quad (10)$$

其中

$$\delta f = -\tau \left[(m + \varepsilon) \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \nabla f_{\text{eq}} - m \nabla V \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial \mathbf{p}} \right]. \quad (11)$$

将(11)式代入(7)式, 可得到系统的动量张量为

$$T^{ij} = T_0^{ij} + \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^i p^j \delta f, \quad (12)$$

其中 $T_0^{ij} = P \delta^{ij}$, 而 P 是局域压强.

为了计算第一粘滞系数 η , 我们注意到在相对论性重离子碰撞中生成的 QGP 的膨胀基本上是沿纵方向, 即束流方向, 因此 u^i 可取为 $u^i = (u_x(y), 0, 0)$, (9) 式约化为

$$T^{xy} = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (13)$$

如果考虑夸克的流动为稳定流动, 则(11)式中 f_{eq} 对时间的导数应为零. 这样利用(12)式和(13)式, 可以得到第一粘滞系数为

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\tau}{15} \left[\frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^4}{\varepsilon_p} \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial \varepsilon_p} \right] \\ &\quad - \frac{\tau}{3} \left[\frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^2 e^{p \cdot u/T} \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial V}{\partial r} \right] \\ &= \eta_1 + \eta_2. \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\eta_1 = -\frac{\tau}{15} \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^4}{\varepsilon_p} \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial \varepsilon_p}.$$

是计及了碰撞项效应, 但不考虑 QGP 中平均场作用时的第一粘滞系数.

$$\eta_2 = -\frac{\tau}{3} \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^2 e^{p \cdot u/T} \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial V}{\partial r}.$$

是考虑平均场效应后, 对第一粘滞系数的贡献部分.

考虑夸克质量 $m < T$ 的情况, (14)式中的被积函数按 $\left(\frac{m}{T}\right)$ 展开, 则可得到第一粘滞系数为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{7\tau}{90} g T^4 \left[1 - \frac{25}{14\pi^2} \left(\frac{m}{T}\right)^2 + \frac{225}{28\pi^4} \left(\frac{m}{T}\right)^3 + \dots \right] \\ &\quad + \frac{7\tau}{18} g T^4 \frac{\partial V}{\partial r} \left[1 + \left(\frac{m}{T}\right) + \frac{55}{14\pi^2} \left(\frac{m}{T}\right)^2 + \frac{215}{28\pi^4} \left(\frac{m}{T}\right)^3 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

对于 $m > T$ 的情况, (14)式中的被积函数按 $\left(\frac{T}{m}\right)$ 展开, 则第一粘滞系数 η 可以用激

励密度表示为

$$\eta = \frac{1}{15} n_1 \tau T \left[1 - \left(\frac{T}{m} \right) + \dots \right] + \frac{1}{3} n_2 \tau T \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{T}{m} \right) + \dots \right], \quad (16)$$

其中

$$n_1 = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p f_{eq}$$

是计及了碰撞项效应但不考虑平均场作用时的激励密度.

$$n_2 = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p f_{eq} \frac{\partial V}{\partial r}$$

是考虑了平均场效应后, 对激励密度贡献部分.

若考虑以上两种极限之间的情况, (14) 式采用数值内插法, 则可得到第一粘滞系数 η 为

$$\eta = \frac{7\tau}{90} g T^4 e^{-m/T} \left[\frac{1 + \left(\frac{m}{T} \right) + 1.321 \left(\frac{m}{T} \right)^2 + 1.145 \left(\frac{m}{T} \right)^{3/2} + 0.925 \left(\frac{m}{T} \right)^{5/2}}{1 + 2.0 \left(\frac{m}{T} \right)^2} \right] + \frac{7\tau}{18} g T^4 e^{-m/T} \frac{\partial V}{\partial r} \left[\frac{1 + 2.132 \left(\frac{m}{T} \right) + 1.892 \left(\frac{m}{T} \right)^2 + 1.776 \left(\frac{m}{T} \right)^{3/2} + 1.361 \left(\frac{m}{T} \right)^{5/2}}{1 + 2.0 \left(\frac{m}{T} \right)^2} \right]. \quad (17)$$

以上结果表明, QGP 中夸克的第一粘滞系数 η 既是温度的函数, 也是弛豫时间 τ 的函数.

以下计算导热系数 κ , 注意到热量 Q 可定义为^[7]

$$Q = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^2 v^x \delta f, \quad (18.1)$$

或

$$Q = -\kappa \cdot \nabla T. \quad (18.2)$$

将(11)式代入(18)式, 则可得到

$$Q = -\tau \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^2 (v^x)^2 \frac{\partial f_{eq}}{\partial T} \nabla T - \tau \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^2 v^x \nabla V \frac{\partial f_{eq}}{\partial p}. \quad (19)$$

于是得到导热系数 κ 为

$$\kappa = \frac{\tau}{5} \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^4}{\epsilon_s^2} \frac{\partial f_{eq}}{\partial T} + \frac{\tau}{15} \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^4}{\epsilon_s^2} e^{p \cdot u/T} \frac{\partial f_{eq}}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) = \kappa_1 + \kappa_2. \quad (20)$$

其中

$$\kappa_1 = \frac{\tau}{5} \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^4}{\epsilon_s^2} \frac{\partial f_{eq}}{\partial T}$$

是不考虑平均场效应时的导热系数.

$$\kappa_2 = \frac{\tau}{15} \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^4}{\varepsilon_p^2} \frac{\partial f_{c9}}{\partial T} e^{p \cdot u/T} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right).$$

是考虑了平均场效应后,对导热系数的贡献部分.

类似 η 的计算,可分别得到当 $m < T$ 、 $m > T$ 和介于两者之间时的导热系数 κ 为

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{7}{30} g T^3 \left[1 - \frac{25}{14\pi^2} \left(\frac{m}{T} \right)^2 + \frac{225}{28\pi^4} \left(\frac{m}{T} \right)^3 + \dots \right] \\ & + \frac{7}{90} g T^3 \left[1 + \left(\frac{m}{T} \right) + \frac{55}{14\pi^2} \left(\frac{m}{T} \right)^2 + \frac{215}{28\pi^4} \left(\frac{m}{T} \right)^3 + \dots \right] \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (m < T) \quad (21)$$

$$\kappa = \frac{4\tau}{5} n_1 \left[1 - \left(\frac{T}{m} \right) + \dots \right] + \frac{4\tau}{15} n_2 \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{T}{m} \right) + \dots \right], (m > T) \quad (22)$$

和

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{7\tau}{30} g T^3 e^{-m/T} \left[\frac{1 + \left(\frac{m}{T} \right) + 1.321 \left(\frac{m}{T} \right)^2 + 1.145 \left(\frac{m}{T} \right)^{3/2} + 0.925 \left(\frac{m}{T} \right)^{5/2}}{1 + 2.0 \left(\frac{m}{T} \right)^2} \right] \\ & + \frac{7\tau}{90} g T^3 e^{-m/T} \\ & \cdot \left[\frac{1 + 2.132 \left(\frac{m}{T} \right) + 1.892 \left(\frac{m}{T} \right)^2 + 1.776 \left(\frac{m}{T} \right)^{3/2} + 1.361 \left(\frac{m}{T} \right)^{5/2}}{1 + 2.0 \left(\frac{m}{T} \right)^2} \right] \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

以上结果表明, QGP 中夸克的导热系数 κ 既是温度的函数,也是弛豫时间 τ 的函数.

3 粘滞效应和导热效应

根据以上推导出来的第一粘滞系数 η 和导热系数 κ 的解析式,可以作出夸克质量不同时 η/τ 和 κ/τ 随温度 T 变化的曲线,如图 1—6 所示.图 1 与图 2 中的曲线是考虑 $g = 5, m_c = 1.5\text{GeV}$ 时, c 夸克系统的 η/τ 和 κ/τ 随 T 变化的曲线.其中曲线 a、a' 分别表示计及了碰撞项效应,不考虑平均场效应时, η/τ 和 κ/τ 随 T 变化的曲线.曲线 b、c 和曲线 b'、c' 分别表示考虑平均场效应后,取 $\omega/T \approx 0.4, r \approx 0.3\text{fm}, d = 2$ 与 $d = 1$ 的 η/τ 和 κ/τ 随 T 变化的曲线.

图 3 和图 4 中的曲线是考虑 $m_{u,d} = 350\text{MeV}$ 时, u, d 夸克系统的 η/τ 和 κ/τ 随 T 变化的曲线.

图 5 中的曲线是 c 夸克系统和 u, d 夸克系统的 η/τ 随 T 变化的曲线.

图 6 中的曲线是 c 夸克系统和 u, d 夸克系统的 κ/τ 随 T 变化的曲线.

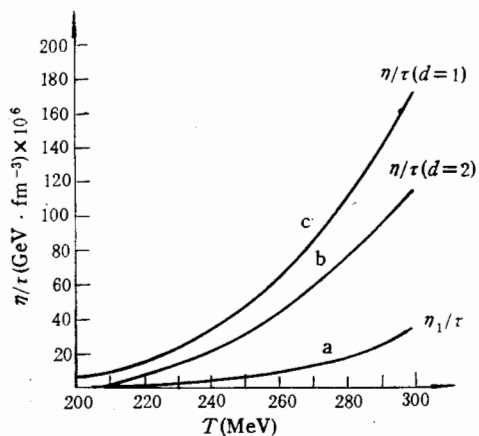


图 1 ($m_c = 1.5 \text{ GeV}$)

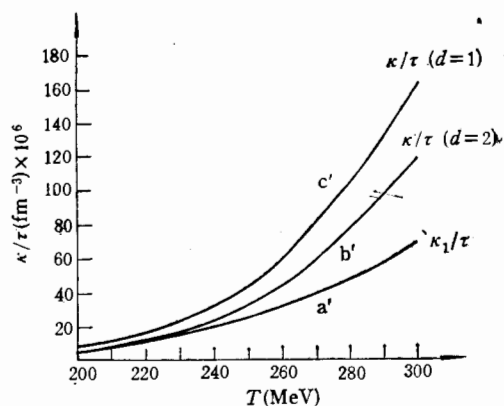


图 2 ($m_c = 1.5 \text{ GeV}$)

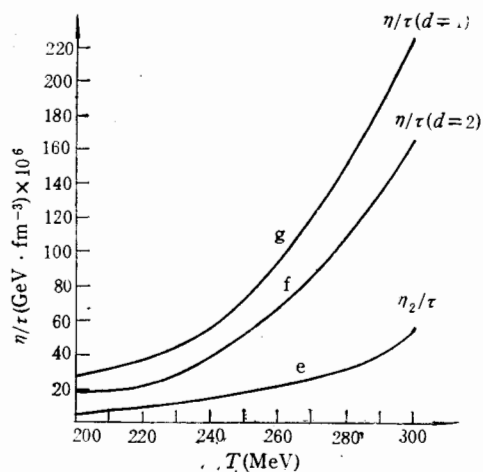


图 3 ($m_{u,d} = 350 \text{ MeV}$)

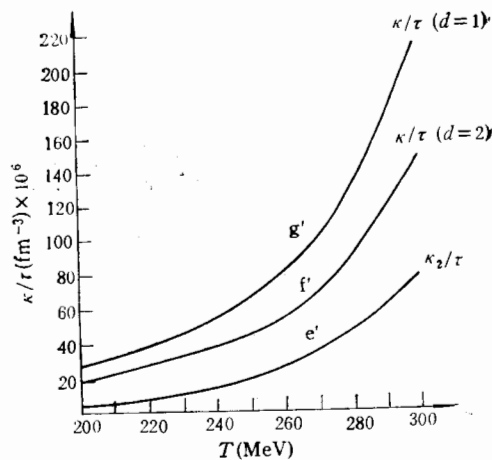


图 4 ($m_{u,d} = 350 \text{ MeV}$)

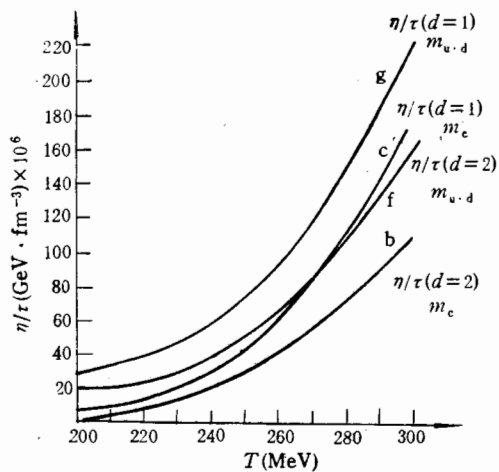


图 5

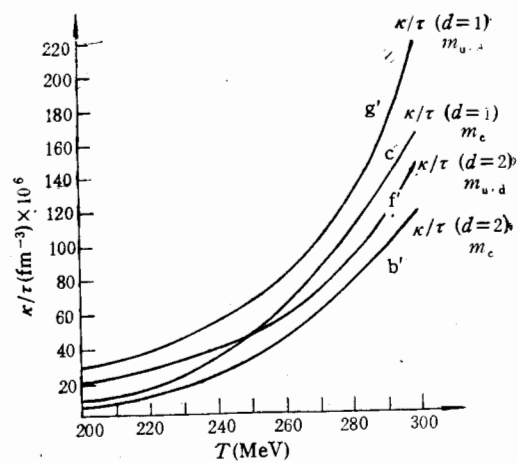


图 6

比较图 1—4, 可以看出 QGP 在热化过程中, 温度愈高, 粘滞效应和导热效应愈大. 在计及了 QGP 的粘滞性和导热性后, QGP 的热化过程减缓. 比较曲线 b、c; f、g; b'、c' 和 f'、g', 还可以看出平均场效应愈强, 粘滞效应和导热效应愈大. 因此可以认为, 粘滞性和导热性使 QGP 的热化过程减缓, 寿命增长. 这一点类似于强子物质的粘滞效应^[8]. 而平均场效应使得这种热化过程减缓进一步降低, 其寿命进一步增长.

比较图 5 和图 6, 可以看出轻夸克系统对平均场效应反映较灵敏. 这说明在计及了平均场效应后, 轻夸克系统的热化过程减缓较重夸克系统的热化过程减缓进一步降低, 其寿命更长.

4 弛豫时间的估算

为了进一步确定弛豫时间 τ , 考虑夸克-夸克散射. 散射过程 $12 \rightarrow 34$ 的费曼图如图 7 所示.

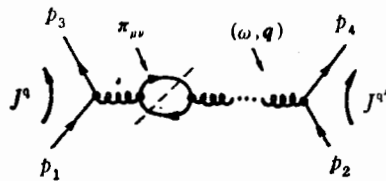


图 7

对于不同味夸克的散射, 其散射截面为^[2]

$$\langle |M_{qq'}|^2 \rangle = \frac{4}{9} g^4 \frac{u^2 + s^2}{t^2}. \quad (24)$$

进一步考虑用夸克能量转移 ω 和动量转移 q 表示, 则有

$$\langle |M_{qq'}|^2 \rangle = \frac{4}{9} g^4 \left[1 + \frac{4m^2}{(\omega^2 - q^2)^2} - \frac{2}{(\omega^2 - q^2)} \right]. \quad (25)$$

于是弛豫时间 τ 可以用散射截面表示为

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\langle |M_{qq'}|^2 \rangle} \\ &= 1 / \left[\frac{4}{9} g^4 \left[1 + \frac{4m^2}{(\omega^2 - q^2)^2} - \frac{2}{(\omega^2 - q^2)} \right] \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

显然, 由(26)式可以看出, 弛豫时间 τ 与能量转移 ω 和动量转移 q 以及夸克质量 m 有关.

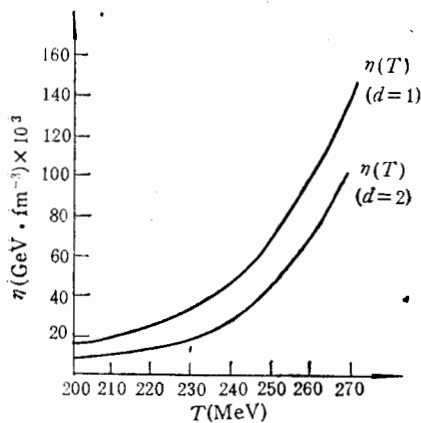
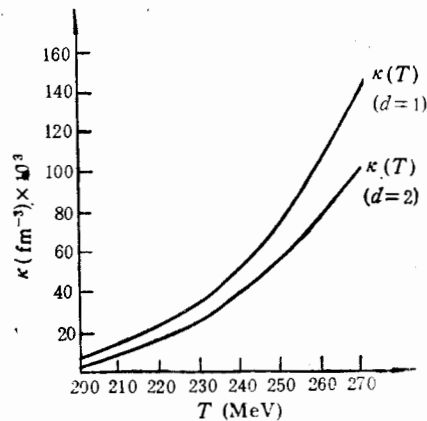
将弛豫时间 τ 代入 $m > T$ 的夸克系统 η 和 κ 中, 可进一步得到用温度 T 和能量转移 ω 与动量转移 q 表示的 η 和 κ 的解析式, 即

$$\eta = \frac{\left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} T^{5/2} \left[1 - \left(\frac{T}{m}\right) + \dots \right] + 5 \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} T^{5/2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{T}{m}\right) + \dots \right] \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)}{g^3 \frac{4}{9} \left[1 + \frac{4m^2}{(\omega^2 - q^2)^2} - \frac{2}{(\omega^2 - q^2)} \right]} \quad (27)$$

和

$$\kappa = \frac{9 \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} T^{3/2} \left[1 - \left(\frac{T}{m}\right) + \dots\right] + 9 \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} T^{3/2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{T}{m}\right) + \dots\right] \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)}{g^3 \left[1 + \frac{4m^2}{(\omega^2 - q^2)^2} - \frac{2}{(\omega^2 - q^2)}\right]} \quad (28)$$

对于 c 夸克系统, 考虑夸克能量动量转移具有温度 T 的量级, 即 $\omega^2 - q^2 \approx T$, 则由 (27) 式和 (28) 式, 可以给出 η 和 κ 随温度 T 变化的关系。如图 8 和图 9 所示。

图 8 ($m_c = 1.5\text{GeV}$)图 9 ($m_c = 1.5\text{GeV}$)

本文用动力论方程描述高能重离子碰撞中 QGP 夸克的时空演化, 并在弛豫时间近似下, 推导出 QGP 中夸克输运系数 η 和 κ 的解析式。利用夸克-夸克散射截面估算了弛豫时间 τ 。研究表明, 计及了粘滞性和导热性, QGP 的热化过程减缓, 其寿命增长。计及了平均场效应, QGP 热化过程减缓进一步降低, 其寿命进一步增长。计及了平均场效应, 轻夸克系统较重夸克系统的热化过程减缓进一步降低, 其寿命更长。

参 考 文 献

- [1] 李家荣, 夸克物质理论导论, 湖南教育出版社, 1989.
- [2] S. Mrówezyński, *Phys. Rev.*, **D39** (1989) 1940.
- [3] H. Heiselberg, C. J. Pethick, *Phys. Rev.*, **D48** (1993) 2916.
- [4] S. R. de Groot, et al., *Relativistic Kinetic Theory*, North-Holland publishing Company, 1980.
- [5] S. Gavin, *Nucl. Phys.*, **A435** (1985) 826.
- [6] H. Satz, *Colour Screening and Quark Deconfinement in Nuclear Collision in: Quark-gluon plasma*, ed. by R. Hwa (World Scientific) 1990, P593.
- [7] 王竹溪, 统计物理学导论, 人民教育出版社, 1978.
- [8] 白 鸽等, 高能物理与核物理, **17**(1993)57.

A Calculation for Transport Coefficients of Quarks in QGP Under the Relaxation Time Approximation

Bai Ge

(Department of physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

Li Jiarong

(Institute of particle physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

Received 4 November 1994

Abstract

Using the Kinetic equation and considering the effect of the average field, the transport coefficients of quarks in QGP under the relaxation time approximation are calculated, and the viscous effect and thermal conductive effect of QGP are discussed.

Key words Quark gloun plasma, Transport Coefficients, Kinetic Equation.