第 19 卷 第 11 期 高能物理与核物理 Vol.19, No.11
1995 年 11 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1995

任意规范下有限温度二圈 QED 热力学势及其交叉发散*

侯德富　李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所　武汉　430070)

1994－11－21 收稿

摘　要

采用有限温度下维数正规化的方法在任意协变规范下精确地计算了双圈 QED 的热力学势及其交叉发散. 计算表明交叉发散彼此相消且所得的结果与规范的选取无关.

关键词　双圈热力学势，交叉发散，规范无关.

1 引　言

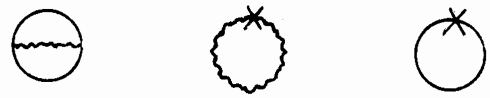
有限温度下的量子场论是描述早期宇宙及热核物质的理论基础[1,2]. 我们知道由热系统的自由能出发可以知道该系统的许多基本特性，因此如何精确地计算双圈 QED 的热力学势具有很重要的理论价值和实际意义. 然而有限温度场论与零温场论相比有许多特殊的问题：如交叉发散、红外发散以及规范相关的问题等等[3－7]. 因而怎样处理有限温度下的重整化问题、规范相关性的问题仍引起人们的广泛兴趣.

对于单圈图人们可以方便地将发散部分与有限温度部分分开. 发散项与温度无关，因而可直接用零温场论中的方法进行重整化[5]. 但对于高圈积分，除包含零温部分的发散外还会出现零温部分与有限温度部分的交叉发散. 同时由于玻色场分布因子的出现还有可能出现红外发散[3,4]. 众所周知，维数正规化一直是零温场论中处理发散及精确计算高阶费曼图的有力工具，而用到温度场中却不多见[4]. 在文献 [4] 中我们用该方法计算了三圈无质量 QED 真空图在费曼规范下与温度有关的紫外发散和红外发散，发现它们均彼此相消. 本文将在任意协变规范下精确计算双圈有费米子质量 QED 的热力学势，并分析其中的交叉发散是怎样消除的及其规范相关性的问题.

2 二圈热力学势及交叉发散

单圈 QED 在有限温度下的重整化与零温场论下完全一样[5]. 双圈 QED 热力学势对应图 1 (a)的真空图，其抵消项对应图 1 (b)—(c).

* 国家自然科学基金资助.



(a)　　(b)　　(c)

图 1　双圈自由能及抵消项

实线表示电子，　波浪线表示光子.

其中图 1(a), (b)和(c)的对称因子分别为 $\frac{1}{2}$，1，$\frac{1}{2}$，且

$$—\!\!\times\!\!— = -\frac{ie^2}{8\pi^2\varepsilon}(4m-\not{p}), \qquad \sim\!\sim\!\times\!\sim\!\sim = -\frac{ie^2}{6\pi^2\varepsilon}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)$$

采用通常的费曼规则，取任意协变规范，在 $D=4-\varepsilon$ 空间中对图 1 (a):

$$I_a = -\frac{e^2}{2}\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\frac{\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}+m)\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}+m)]}{(p^2-m^2)k^2[(p+k)^2-m^2]}\left(g_{\mu\nu}+\xi\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$

$$= -\frac{e^2}{2}\times\underline{4}\times(2-D)\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\frac{p^2+p\cdot k+Cm^2}{(p^2-m^2)k^2[(p+k)^2-m^2]}$$

$$-\frac{e^2}{2}f(D)\xi\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\frac{2(p\cdot k)^2+(p\cdot k)k^2-k^2p^2+m^2k^2}{(p^2-m^2)k^4[(p+k)^2-m^2]}.$$

通过简单的组合，化简可得

$$I_a = A\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\frac{p^2+p\cdot k+Cm^2}{(p^2-m^2)k^2[(p+k)^2-m^2]}$$
$$+B\xi\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\left[\frac{p\cdot k}{k^4(p^2-m^2)}-\frac{p\cdot k}{k^4[(p+k)^2-m^2]}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{k^2[(p+k)^2-m^2]}\right], \tag{1}$$

其中 ξ 为规范参数，且

$$A = -\frac{e^2}{2}\times\underline{4}\times(2-D),\ B = -\frac{e^2}{2}\times f(D),\ C = \frac{f(D)}{2-D},$$

$$\underline{4} = \mathrm{Tr}I, \quad f(4) = 4. \tag{2}$$

对 (1)式中第二项作变量代换 $p+k\to p'$，不难证明与 ξ 相关的部分相互抵消，因此

$$I_a = A\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\frac{p^2+p\cdot k+Cm^2}{(p^2-m^2)k^2[(p+k)^2-m^2]}. \tag{3}$$

采用实时形式的温度场论，规范场和费米场的传播子分别为[2,6]

$$i\Delta^{\mu\nu}(k)=\left(-g_{\mu\nu}-\xi\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left[\frac{i}{k^2+i\varepsilon}+2\pi n_B(k)\delta(k^2)\right],$$

$$i\Delta(p)=(\not p+m)\left[\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}-2\pi n_f(p)\delta(p^2-m^2)\right]. \tag{4}$$

其中 n_B、n_f 分别是玻色场和费米场的分布函数

$$n_B(k)=\frac{1}{e^{\beta|k_0|}-1},\quad n_f(p)=\frac{1}{e^{\beta|p_0|}+1}. \tag{5}$$

由于与温度无关的部分在零温场论中已讨论清楚了，因而我们只关心与温度相关的自由能及其交叉发散. 在作计算时只需对 (3) 式中分母各项分别作如下代换:

$$\frac{1}{k^2}\rightarrow-2\pi i\delta(k^2)n_B(k),$$

$$\frac{1}{p^2-m^2}\rightarrow 2\pi i\delta(p^2-m^2)n_f(p). \tag{6}$$

在对 (3) 式进行上述代换的结果中会包括一个，二个或三个 δ 函数的项. 其中包含三个 δ 函数的项贡献为零，因为

$$\delta(k^2)\delta(p^2-m^2)\delta[(p+k)^2-m^2]=0. \tag{7}$$

包含单个 δ 函数的贡献有如下三项:

$$\begin{aligned}I_{a_1}^{(1)}&=-A\iint\frac{d^Dp\,d^Dk}{(2\pi)^{2D}}\frac{p^2+p\cdot k+Cm^2}{(p^2-m^2)[(p+k)^2-m^2]}2\pi i\delta(k^2)n_B(k)\\&=-A\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\int_0^1dx\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{(p-kx)^2+(p-kx)\cdot k+Cm^2}{(p^2-R_1^2)^2}\\&\quad\cdot 2\pi i\delta(k^2)n_B(k).\end{aligned}$$

其中 $R_1^2=m^2-k^2x(1-x)$. 完成对 p 和 x 的积分后

$$I_{a_1}^{(1)}=-Aim^{2-\varepsilon}(4\pi)^{-\frac{D}{2}}\left[-\frac{i\Gamma\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(2-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\cdot\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right)+iC\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]I_\beta^B(k), \tag{8}$$

这里

$$I_\beta^B(k)=\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}2\pi\delta(k^2)n_B(k)\xlongequal{\varepsilon\to 0}\frac{T^2}{12},$$

$$\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right)=-\left[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+1+O(\varepsilon)\right],$$

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+O(\varepsilon)\quad(\gamma\ \text{为欧拉常数}). \tag{9}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时 $C\to -2$ $A\to 4e^2$，因此

$$I_{a_1}^{(\mathrm{I})}=-i4e^2m^2(4\pi)^{-2}\left[2i\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+1\right)-2i\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma\right)\right]I_\beta^{\mathrm{B}}=\frac{e^2m^2}{24\pi^2}T^2. \tag{10}$$

同样可得

$$\begin{aligned}I_{a_2}^{(\mathrm{I})}&=A\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\frac{p^2+p\cdot k+Cm^2}{k^2[(p+k)^2-m^2]}\cdot 2\pi i\delta(p^2-m^2)n_{\mathrm{f}}(p)\\&=A\int\frac{\mathrm{d}^Dp}{(2\pi)^D}\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}\frac{p^2+p\cdot k-p^2x+Cm^2}{(k^2-R_2^2)^2}\cdot 2\pi i\delta(p^2-m^2)n_{\mathrm{f}}(p),\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $R_2^2=m^2x-p^2x$，完成对 k 和 x 的积分后得

$$\begin{aligned}I_{a_2}^{(\mathrm{I})}&=Aim^{2-\varepsilon}(4\pi)^{-\frac{D}{2}}i\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+C\right)I_\beta^{\mathrm{f}}\\&\overset{\varepsilon\to 0}{=\!=}6e^2m^2(4\pi)^{-2}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma\right)I_\beta^{\mathrm{f}},\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$I_\beta^{\mathrm{f}}=\int\frac{\mathrm{d}^Dp}{(2\pi)^D}\cdot 2\pi\delta(p^2-m^2)n_{\mathrm{f}}(p). \tag{13}$$

$I_{a_2}^{(\mathrm{I})}$ 包含有限部分和发散部分

$$\begin{aligned}&I_{a_2}^{(\mathrm{I})\mathrm{f}}=-6e^2m^2(4\pi)^{-2}\gamma I_\beta^{\mathrm{f}}\quad(\gamma\ \text{为欧拉常数}),\\&\mathrm{div}\,I_{a_2}^{(\mathrm{I})}=6e^2m^2(4\pi)^{-2}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)I_\beta^{\mathrm{f}}.\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}I_{a_3}^{(\mathrm{I})}&=A\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\frac{p^2+p\cdot k+Cm^2}{k^2(p^2-m^2)}\cdot 2\pi in_{\mathrm{f}}(p+k)\delta[(p+k)^2-m^2]\\&=I_{a_2}^{(\mathrm{I})}.\end{aligned} \tag{15}$$

包含两个 δ 函数的贡献有

$$\begin{aligned}I_{a_1}^{(\mathrm{II})}&=A\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\frac{p^2+p\cdot k+Cm^2}{[(p+k)^2-m^2]}\cdot 2\pi\delta(p^2-m^2)n_{\mathrm{f}}(p)\cdot 2\pi\delta(k^2)n_{\mathrm{B}}(k)\\&\overset{\varepsilon\to 0}{=\!=}-\frac{e^2}{6}T^2\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\cdot 2\pi n_{\mathrm{f}}(p)\delta(p^2-m^2)\\&=-\frac{e^2}{6}T^2I_\beta^{\mathrm{f}}.\end{aligned} \tag{16}$$

经过变量代换后易得

$$I_{a_2}^{(\mathrm{II})}=A\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\ \frac{p^2+p\cdot k+Cm^2}{(p^2-m^2)}\ 2\pi\delta[(p+k)^2-m^2]n_\mathrm{f}(p+k)2\pi\delta(k^2)n_\mathrm{B}(k)$$

$$=I_{a_1}^{(\mathrm{II})}=-\frac{e^2}{6}T^2I_\beta^\mathrm{f}. \tag{17}$$

$$I_{a_3}^{(\mathrm{II})}=-A\iint\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{2D}}\ \frac{p^2+p\cdot k+Cm^2}{k^2}\ 2\pi\delta(p^2-m^2)n_\mathrm{f}(p)$$

$$\cdot\ 2\pi\delta[(p+k)^2-m^2]n_\mathrm{f}(p+k)$$

$$=-2e^2\int\frac{\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^{2\times4}}\left(1+\frac{2m^2}{(p-k)^2}\right)$$

$$\cdot\ 2\pi\delta(p^2-m^2)n_\mathrm{f}(p)2\pi\delta(k^2-m^2)n_\mathrm{f}(k). \tag{18}$$

容易看出 (16), (17)和 (18)式均为有限结果.

图 1(b)的贡献为

$$I_b=\frac{ie^2}{8\pi^2\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^Dp}{(2\pi)^D}\ \frac{\mathrm{Tr}[(4m-\not p)(\not p+m)]}{p^2-m^2}$$

$$=\frac{ie^2}{8\pi^2\varepsilon}\times4\int\frac{\mathrm{d}^Dp}{(2\pi)^D}\ \frac{4m^2-p^2}{p^2-m^2}. \tag{19}$$

其中与温度相关的贡献为

$$I_b^{(\mathrm{I})}=-\frac{e^2}{8\pi^2\varepsilon}\times4\int\frac{\mathrm{d}^Dp}{(2\pi)^D}(4m^2-p^2)2\pi n_\mathrm{f}(p)\delta(p^2-m^2)$$

$$=-12m^2e^2\frac{\frac{2}{\varepsilon}}{(4\pi)^2}I_\beta^\mathrm{f}. \tag{20}$$

图1 (c)中与温度相关的贡献为零, 因为 $k^2\delta(k^2)=0$. 即

$$I_c^{(\mathrm{I})}=\frac{e^2}{6\pi^2\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\left(g_{\mu\nu}+\xi\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)2\pi\delta(k^2)n_\mathrm{B}(k)$$

$$=0. \tag{21}$$

至此我们可得到二圈 QED 真空图与温度相关部分的贡献. 其中发散部分为

$$\mathrm{div}I=\mathrm{div}I_a+\mathrm{div}I_b+\mathrm{div}I_c$$

$$=2\times\mathrm{div}I_{a_2}^{(\mathrm{I})}+I_b^{(\mathrm{I})}$$

$$=12m^2e^2\frac{\frac{2}{\varepsilon}}{(4\pi)^2}I_\beta^\mathrm{f}-12m^2e^2\frac{\frac{2}{\varepsilon}}{(4\pi)^2}I_\beta^\mathrm{f}=0. \tag{22}$$

有限部分的贡献为

$$
\begin{aligned}
I^{\mathrm{f}} &= I_{a_1}^{(\mathrm{I})} + 2\times I_{a_2}^{(\mathrm{I})\mathrm{f}} + 2\times I_{a_1}^{(\mathrm{II})} + I_{a_3}^{(\mathrm{II})} \\
&= \frac{e^2m^2T^2}{24\pi^2} - \frac{3m^2e^2}{4\pi^2}\gamma I_\beta^{\mathrm{f}^-}(p) - \frac{e^2}{3}T^2 I_\beta^{\mathrm{f}} \\
&\quad -2e^2\iint \frac{\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^{2\times 4}}\left(1+\frac{2m^2}{(p-k)^2}\right) \\
&\quad \cdot 2\pi\delta(p^2-m^2)n_{\mathrm{f}}(p)\times 2\pi\delta(k^2-m^2)n_{\mathrm{f}}(k).
\end{aligned} \tag{23}
$$

值得指出的是，在文献[1]中作者采用虚时形式讨论了在费曼规范下的二圈 QED 热力学势．但[1]中没有明确地分离出发散部分并证明其抵消，另外其结果丢掉了含一个分布函数的有限部分，如上式中的前两项．

若取无质量 QED，令 $m=0$，则由(14)、(20)式得

$$
\mathrm{div}I_a=0,\ \mathrm{div}I_b=0,\ \mathrm{div}I_c=0. \tag{24}
$$

$$
I^{\mathrm{f}} = -\frac{5e^2}{288}T^4. \tag{25}
$$

这表明二圈无质量 QED 的有效势不出现与温度相关的发散．另一方面尽管有 $n_{\mathrm{B}}(k)$ 的出现，但从上面结果看当 $k\to 0$ 时结果仍收敛，这是由于在两圈下不出现 $\int \mathrm{d}k\frac{1}{k}n_{\mathrm{B}}(k)$ 型积分，因而没有红外发散，但在更高圈图中红外发散会出现[4]．

3 结　　论

本文采用维数正规化的方法，在 $D=4-\varepsilon$ 维空间中精确计算了二圈有质量 QED 在任意规范下的有限温度热力学势及其交叉发散，得到了规范无关的结果，并与以往文献作了比较，指出了文献中丢掉的部分．清楚地表明交叉发散彼此相消，并分析了红外发散在双圈不出现，只能在更高阶出现．

感谢 Y. Fujimoto 教授对本文初段工作的有益启发．

参　考　文　献

[1] J. I. Kapusta, "Finite-Temperature Field Theory" (Cambarige Univ. Press, 1989).

[2] I. Ojima, *Ann. of Phys.*, **137** (1981) 1.

[3] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B44** (1972) 189; C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Nuovo Cimento*, **12B** (1972) 20.

[4] Y. Fujimoto, Hou Defu, *Phys, Lett.*, **B335** (1994) 87.

[5] J. F. Donoghue et al., *Ann. of Phys.*, **164** (1985) 233.

[6] R. L. Kobes, G. W. Semenoff, *Nucl. Phys.*, **B260** (1985) 714.

[7] R. D. Pisarski, *Phys. Rev.*, **D47** (1993) 5589.

Finite-Temperature Thermodynamic Potential of Two-Loop QED and Overlapping Divergences at Arbitrary Gauge

Hou Defu Li Jiarong

(*Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan* 430070)

Received 21 November 1994

Abstract

The dimensional regularization at finite temperature is applied to calculate accurately the thermodynamic potential of two-loop QED and the overlapping divergences at arbitrary gauge. It indicates that the overlapping divergences are cancelled with each other and the result is gauge-independent.

Key words Two-loop termodynamic potential, overlapping divergence, Gauge-independent.