第19卷 第9期　　高能物理与核物理　　Vol. 19, No. 9
1995年9月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Sep., 1995

$e^+e^- \to m(q\bar{q}) + ng$ 过程的颜色等效哈密顿量*

王　群　　谢去病[1)]
（山东大学物理系　济南　250100）

1994-09-14 收稿

摘　要

Lund 模型中多部分子的动量分布是由 PQCD 得出，而这些部分子间的色弦结构则另外由唯象模型指派. 从最近发展的 $e^+e^- \to m(q\bar{q}) + ng$ 矩阵元递归形式，找出其颜色部分的等效哈密顿量 H_c，研究了 H_c 矩阵元的基本性质，作为从 PQCD 统一研究多部分子间颜色组态及色相互作用的基础.

关键词　颜色等效哈密顿量，部分子，颜色组态.

目前关于高能粒子反应的理论描述都包括两个主要部分：一是用 PQCD（用传统矩阵元（ME）或部分子簇射（PS）模型)计算强子化前的多部分子运动学状态；二是用某些唯象模型实现该部分子体系的强子化[1]. 多部分子体系的色弦结构既作为前段 PQCD 过程的结果，又作为后面应用强子化模型的起点，是目前理论处理中联接 QCD 微扰相与非微扰相的界面与桥梁，起着关键作用[2]. 显然，如果强子化前多部分子体系 $m(q\bar{q}) + ng$ 的动量状态可由 PQCD 计算，它们的色弦组态也应采用 PQCD 的定义和结果. 但由于传统 ME 方法对多部分子体系的计算很困难，而 PS 和 CD 模型则直接从几率的演化出发，一开始就不分辨部分子的颜色，不能同时给出 $m(q\bar{q}) + ng$ 间的色弦状态[3]，只能另用模型来指派. 最近，F. A. Berends 和 W. T. Giele 找到一种用 PQCD 计算 $e^+e^- \to m(q\bar{q}) + ng$ 过程的矩阵元递归算法，自然地包括了树图近似下的所有可能的 Feynman 图，与严格的 ME 方法一样，考虑了精确的运动学效应，计入了完全的自旋结构和颜色结构，不仅可以递归地给出任意数目末态部分子的不变振幅，而且可以把它们的颜色部分分离出来，研究其色相互作用[4]. 本文在明确写出颜色自由度的算符表述及其 $SU_c(3)$ 属性后，从 $e^+e^- \to m(q\bar{q}) + ng$ 过程矩阵元的递归形式中，找出描写该过程的色相互作用的等效哈密顿量 H_c，并研究了 H_c 的矩阵元的某些基本性质，作为进一步研究该多部分子系统色弦结构的基础.

如所周知，夸克颜色和反颜色为 $SU_c(3)$ 的 $\underset{\sim}{3}$ 与 $\underset{\sim}{3}^*$ 重态，可写为

---

* 国家自然科学基金资助.

1) CCAST 成员及中国科学院理论物理所客座研究人员.

791—795

$$|\Psi_{i_u}\rangle=(|R\rangle,|Y\rangle,|B\rangle),|\Psi^{i_u}\rangle=(|\bar{R}\rangle,|\bar{Y}\rangle,|\bar{B}\rangle), \tag{1}$$

其中 i_u 是颜色指标，u 是夸克的标号；R, Y, B 是通常的红，黄，兰三种色荷，$\bar{R},\bar{Y},\bar{B}$ 是其相应的反色荷. 在粒子数表象下，引进其产生算符及其共轭的湮没算符 Ψ_i,Ψ^i，则

$$\Psi^+_{i_u}=(R^+,Y^+,B^+),\Psi^{+}_{i_u}=(\bar{R}^+,\bar{Y}^+,\bar{B}^+), \tag{2}$$

$$|\Psi_{i_u}\rangle=\Psi^+_{i_u}|0\rangle,|\Psi^{i_u}\rangle=\Psi^{+}_{i_u}|0\rangle, \tag{3}$$

且

$$\Psi_{i_u}|0\rangle=\Psi^{i_u}|0\rangle=0. \tag{4}$$

这里，$|0\rangle$是色真空态，对于夸克 u,v 的颜色产生和湮没算符，定义以下对易关系

$$[\Psi_{i_u},\Psi^+_{j_v}]=[\Psi^{i_u},\Psi^{+}_{j_v}]=\delta_{i_u,j_v}\delta_{u,v}, \tag{5}$$

其它对易子 $=0$.

胶子颜色为 $SU_c(3)$ 的 8 重态，其产生算符 $A^{a_u+}_u$ 定义为

$$A^{1+}_u=(R^+\bar{Y}^++Y^+\bar{R}^+)_u/\sqrt{2},$$

$$A^{2+}_u=(Y^+\bar{R}^+-R^+\bar{Y}^+)_u/(\sqrt{2}i),$$

$$A^{3+}_u=(R^+\bar{R}^+-Y^+\bar{Y}^+)_u/\sqrt{2},$$

$$A^{4+}_u=(R^+\bar{B}^++B^+\bar{R}^+)_u/\sqrt{2},$$

$$A^{5+}_u=(B^+\bar{R}^+-R^+\bar{B}^+)_u/(\sqrt{2}i),$$

$$A^{6+}_u=(Y^+\bar{B}^++B^+\bar{Y}^+)_u/\sqrt{2},$$

$$A^{7+}_u=(B^+\bar{Y}^+-Y^+\bar{B}^+)_u/(\sqrt{2}i),$$

$$A^{8+}_u=(R^+\bar{R}^++Y^+\bar{Y}^+-2B^+\bar{B}^+)_u/\sqrt{2},$$

$$|A^{a_u}_u\rangle=A^{a_u+}_u|0\rangle. \tag{6}$$

其共轭 $A^{a_u}_u$ (胶子湮没算符)为

$$A^{a_u}\equiv[(A^{a_u+})^T]^*. \tag{7}$$

(6) 式中 $i=\sqrt{-1}$; (7)式中 $a_u=1,2,\cdots 8,u$ 是该胶子的序号；且满足

$$\langle A^{a_u}_u|A^{a_v}_v\rangle=\langle 0|A^{a_u}_uA^{a_v+}_v|0\rangle=\delta_{u,v}\delta_{a_u,a_v},$$

$$[A^{a_u}_u,A^{a_v}_v]=[A^{a_u+}_u,A^{a_v+}_v]=0. \tag{8}$$

下面利用文献[4]得到的 $e^+e^-\to m(q\bar{q})+ng$ 过程的不变振幅找出色等效哈密顿 H_c.

以 $m=1$ 的 $e^+e^-\to q\bar{q}+ng$ 过程为例. 文献[4]已给出树图近似下，产生颜色为 $|\Psi_i\rangle$ 的 q 和颜色为 $|\Psi^i\rangle$ 的 $\bar{q}$ 及颜色为 $|A^{a_u}_u\rangle$ $(a_u=1,2,\cdots,8;u=1,2,\cdots,n)$ 的 n 个胶子的不变振幅为

$$M^{a_1\cdots a_{1n}}_{ij}=\sum_{\rho=P(1\cdots n)}(T^{a_1}\cdots T^{a_n})^{\rho}_{ij}D^{\rho}, \tag{9}$$

这里 $T^{a_u}=\lambda^{a_u}/2,a_u=1,\cdots,8$; 其中 λ^{a_u} 是 $SU(3)$ 的 Gell-Mann 矩阵；求和是对胶子序列 $(1,2,\cdots,n)$ 的所有置换进行的，$D^{\rho}\equiv D(q,\bar{q},g_{P(1)},g_{P(2)},\cdots,g_{P(n)})$ 是夸克，反夸克和 n 个胶子 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 动量的函数，其中动量标记被省略了；ρ 表示$(1,2,\cdots,n)$

的某一置换。

寻找 H_c，使对于颜色初态$|0\rangle$和部分子颜色末态

$$|f\rangle = |\Psi_{i'}\Psi^{j'}A_1^{a_1'}A_2^{a_2'}\cdots A_n^{a_n'}\rangle,$$

有

$$\langle f|H_c|0\rangle = \langle \Psi_{i'}\Psi^{j'}A_1^{a_1'}A_2^{a_2'}\cdots A_n^{a_n'}|H_c|0\rangle = M_{i'j'}^{a_1'\cdots a_n'}. \tag{10}$$

下面将看到，满足上式的 H_c 为

$$\begin{aligned} H_c &= \sum_\rho (T^{a_1}\cdots T^{a_n})_{ij}^\rho D^\rho \Psi_i^+\Psi^{j+}A_1^{a_1+}A_2^{a_2+}\cdots A_n^{a_n+} \\ &= \sum_\rho (1/\sqrt{2})^n \mathrm{Tr}(Q^+G_1^+G_2^+\cdots G_n^+)^\rho D^\rho. \end{aligned} \tag{11}$$

这里，重复指标代表求和(以后如未经特别指明都采用这一约定)；上式中

$$(Q^+)_i^j \equiv \Psi^{j+}\Psi_i^+ \tag{12}$$

是夸克反夸克色产生算符构成的九维可约张量；

$$\begin{aligned} G_u^+ &\equiv (1/\sqrt{2})\lambda^{a_u}A_u^{a_u+} \\ &= G_u'^+ - S_u^+E/3 = \Psi_u^{i+}\Psi_{uj}^+ - \Psi_u^{i+}\Psi_{ui}^+E/3, \end{aligned} \tag{13}$$

是胶子 u 的色产生算符构成的八维不可约张量，$A_u^{a_u+}$ 的显式由（6）给出；E是单位矩阵。$G_u'^+$ 和 S_u^+ 由下式给出

$$G_u'^+ \equiv (1/\sqrt{2})\begin{bmatrix} R^+\bar{R}^+ & R^+\bar{Y}^+ & R^+\bar{B}^+ \\ Y^+\bar{R}^+ & Y^+\bar{Y}^+ & Y^+\bar{B}^+ \\ B^+\bar{R}^+ & B^+\bar{Y}^+ & B^+\bar{B}^+ \end{bmatrix}_u, \tag{14}$$

$$S_u^+ \equiv (R^+\bar{R}^+ + Y^+\bar{Y}^+ + B^+\bar{B}^+)_u. \tag{15}$$

(11)式表明 H_c 不是厄米的，因为 H_c 只是 S 矩阵元的一种形式，不必有厄米性。

(11)式的 H_c 的正确性可从下面 $e^+e^-\to q\bar{q}+ng$ 的跃迁矩阵元平方的计算结果得到验证。初态为色真空态$|0\rangle$，末态 $|f\rangle = |\Psi_{i'}\Psi^{j'}A_1^{a_1'}A_2^{a_2'}\cdots A_n^{a_n'}\rangle$，对所有末态夸克，反夸克的颜色指标 i',j' 及胶子颜色指标 $a_{1'},a_{2'},\cdots,a_{n'}$ 求和，则，

$$\begin{aligned} &\sum_f |\langle f|H_c|0\rangle|^2 \\ &= \langle 0|H_c^+|\Psi_{i'}\Psi^{j'}A_1^{a_1'}A_2^{a_2'}\cdots A_n^{a_n'}\rangle \\ &\quad \cdot \langle \Psi_{i'}\Psi^{j'}A_1^{a_1'}A_2^{a_2'}\cdots A_n^{a_n'}|H_c|0\rangle \\ &= \langle 0|H_c^+H_c|0\rangle \\ &= \sum_\rho\sum_{\rho'} [(T^{a_1}\cdots T^{a_n})_{ij}^\rho]^* D^{\rho *}(T^{a_1'}\cdots T^{a_n'})_{i'j'}^{\rho'} D^{\rho'} \\ &\quad \cdot \langle 0|\Psi_i\Psi^j A_1^{a_1}A_2^{a_2}\cdots A_n^{a_n}\Psi_{i'}^+\Psi^{j'+}A_1^{a_1'+}A_2^{a_2'+}\cdots A_n^{a_n'+}|0\rangle \\ &= \sum_\rho\sum_{\rho'} (T^{a_n}\cdots T^{a_1})_{ji}^\rho (T^{a_1}\cdots T^{a_n})_{ij}^{\rho'} D^{\rho *}D^{\rho'} \\ &= M_{ij}^{a_1\cdots a_n}(M_{ij}^{a_1\cdots a_n})^* \end{aligned} \tag{16}$$

上面我们用到了(5)和(8)式，这表明在计算通常的部分子跃迁振幅时，的确回到原来的形式，因此(5)与(8)的定义是合理的。

同理，$e^+e^- \to q_1\bar{q}_1q_2\bar{q}_2 + ng$ 的等效哈密顿量 H_c 可写为

$$H_c = \sum_{\rho=P(1\cdots n)} \sum_{k+l=n} \sum_{i,j} (1/\sqrt{2})^x D^{\rho}_{ij,kl}$$
$$\cdot \mathrm{Tr}(Q_1^+ G_1^+ G_2^+ \cdots G_i^+ T^x G_{i+1}^+ \cdots G_k^+)$$
$$\cdot \mathrm{Tr}(Q_2^+ G_{k+1}^+ G_{k+2}^+ \cdots G_{k+j}^+ T^x G_{k+j+1}^+ G_{k+l}^+) \tag{17}$$

其中，$D^{\rho}_{ij,kl}$ 是这些部分子动量的函数，它与内线位置 i,j 及 $q_1\bar{q}_1$ 和 $q_2\bar{q}_2$ 辐射出的胶子数目 k 和 l 有关;对 x 求和就是对内线胶子的色指标求和.

对于m对 $q\bar{q}$ 及 n 个胶子的任意多部分子系统,根据递归形式的矩阵元，可以用同样方法写出其色相互作用等效哈密顿量,这里不再赘述.

H_c 的矩阵元 $\langle f|H_c|0\rangle$ 描述从颜色真空态$|0\rangle$到某一多部分子颜色组态 $|f\rangle$ 的不变振幅. 下面给出 H_c 阵矩元的几个重要性质.

(1) 因为 H_c 是 $SU_c(3)$ 色标量，$\langle f|H_c|0\rangle$ 又必须满足 $SU_c(3)$ 不变性,所以物理的颜色组态 $|f\rangle$ 必须是色单态,即 $SU_c(3)$ 色标量. 这一性质排除了以色中性流或色中性集团作为物理颜色组态,因为纯色中性态，除非它是色单态，并不能满足 $\langle f|H_c|0\rangle$ 的 $SU_c(3)$ 不变性,这是我们从严格 $SU_c(3)$ 分析色弦组态与现有模型的基本区别.

(2) 设 $|A^{a_u}_u\rangle$ 是某胶子 g_u 的态矢，$|S_u\rangle$ 是单态，有 $\langle S_u|A^{a_u}_u\rangle = 0$, 如果颜色组态 $|f\rangle$ 中包含 $|S_u\rangle$, 即 $|S_u\rangle \in |f\rangle$, 则 $\langle f|H_c|0\rangle = 0$, 这一性质保证凡包含同一胶子的色荷与互补反色荷构成的色单态的颜色组态都是非物理的. 已有的模型都满足这一性质.

(3) $m(q\bar{q}) + ng$ 的颜色组态来自 m个 $(q\bar{q})$ 对和 n 个胶子的色荷,因此属于色空间:

$$3_{q_1} \times 3^*_{\bar{q}_1} \times \cdots\cdots \times 3_{q_m} \times 3^*_{\bar{q}_m} \times 3_1 \times 3_1^* \times \cdots \times 3_n \times 3_n^*, \tag{18}$$

其中 $3_{q_u}, 3^*_{\bar{q}_u}(u = 1,\cdots,m)$ 表示第 u 对夸克的颜色空间; $3_v, 3_v^*(v = 1,\cdots,n)$ 表示胶子 v 的色与反色构成的 3 和 3^* 空间态.

$$|\Psi^{i_1}_{\bar{q}_1}\Psi_{q_1j_1}\cdots\cdots\Psi^{i_m}_{\bar{q}_m}\Psi_{q_mj_m}\Psi^{k_1}_1\Psi_{1l_1}\Psi^{k_2}_2\Psi_{2k_2}\cdots\cdots\Psi^{k_n}_n\Psi_{nk_n}\rangle \tag{19}$$

构成色空间 (18) 的完备基,其中 $i_u, j_u = 1,2,3$; $k_v, l_v = 1,2,3$ $(v = 1,\cdots,n)$. 空间(18)的约化方式有多种,与每种约化方式相对应的都有一套相互正交的色单态空间,这套色单态空间的态矢构成该部分子体系的一个完备集,即如果把某套色单态记为 $|f_k\rangle, k = 1,2,\cdots$,则

$$|f_k\rangle\langle f_k| = 1 \quad 和 \quad \langle f_k|f_{k'}\rangle = \delta_{kk'} \tag{20}$$

并有

$$\sum_k |\langle f_k|H_c|0\rangle|^2$$
$$= \langle 0|H_c^+|f_k\rangle\langle f_k|H_c|0\rangle$$
$$= |M(q_1,\bar{q}_1,\cdots,q_m,\bar{q}_m,g_1,\cdots,g_n)|^2 \tag{21}$$

这一性质表明每套单态跃迁截面 σ_k 之和都等于总截面 σ_0, 即 $\sum_k \sigma_k = \sigma_0$, 这是么正

性的结果。显然，对另一套色单态基 $|f'_k\rangle$，(20)和(21)式也成立，这两套基差一个变换矩阵。

为了与现有从 PQCD 预言的 $e^+e^-\to m(q\bar{q})+ng$ 动量分布自洽，需要研究从 PQCD 预言的 $m(q\bar{q})+ng$ 部分子间的颜色组态及其色弦结构，本文从文献[4]给出的 $e^+e^-\to m(q\bar{q})+ng$ 过程递归算法得到的矩阵元出发，把隐含的色相互作用等效哈密顿量 H_c 找出来，并研究了它的矩阵元的一些基本性质，使我们能以此为基础，用严格 PQCD 定义并计算 $m(q\bar{q})+ng$ 的任何颜色组态的截面，从而把我们在文献[5]分析 $m=n=1$ 及 $m=0, n=3$ 部分子体系色弦结构的方法，推广到任意部分子体系。对 $m=1$，$n=1,2,3$ 系统的研究，将在文献[6]中给出。

参　考　文　献

[1] T. Hebbeker, *Phys. Rep.*, **217** (1992) 69; P. Mättig, *Phys. Rep.*, **177**(1989)142.

[2] T. Sjöstrand, *Inter. J. Mod. Phys.*, **A3** (1988) 751; in Z Physicsat LEP1, CERN Report CERN-89-08, **Vol. III**, p. 143.

[3] 谢去病，"$e^+e^-\to h's$ 模型的近期检验和发展"，全国第四届多粒子产生与相对论重离子碰撞研究论文集，p. 49 (1993 年 9 月)，胡源、刘连寿编，华中师大出版。

[4] F. A.Berends, W. T. Giele, *Nucl. Phys.*, **B306**(1988)759; F. A. Berends, W. T. Giele, H. Kuijf, *Nucl. Phys.*, **B321**(1989)39.

[5] Lili Tian, Qubing Xie, Zongguo Si, *Phys. Rev.*, **D49**(1994)4517; 田丽丽、谢去病、司宗国，高能物理与核物理，**17**(1993)717.

[6] 王群、谢去病，"$q\bar{q}+ng$ 多部分子系统的色单态集"，高能物理与核物理，待发。

Effective Hamiltonian for Process $e^+e^-\to m(q\bar{q})+ng$

Wang Qun　　Xie Qubing

(*Physics Department, Shandong University, Jinan* 250100)

Received 14 September 1994

Abstract

The momentum distribution of multiparton system is derived from PQCD in Lund model, whileits color string configuration among partons is assigned by phenomenological model. Using recursive formulation of matrix elements for $e^+e^-\to m(q\bar{q})+ng$, the effective Hamiltonian is found and some of its properties are given as the basis for the study of color interaction and color string configuration among partons.

Key words　effective Hamiltonian, parton, color configuration.