第22卷 第9期 高能物理与核物理 Vol.22, No.9
1998 年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1998

一种具有 $O(2,2)$ 对偶对称的弦宇宙学解*

陶必友
(成都77信箱工学院 成都 610066)
颜骏
(西南交通大学现代物理研究所 成都 610031)
邱孝明
(西南物理研究院 成都 610041)

摘要 研究了时间相关的度规、挠率、dilaton 背景场及其 Liouville 势场作用下的低能对偶弦模型，获得了时空维数 $D=3$ 时的经典弦宇宙学解. 通过 $O(2,2)$ 对偶变换，发现可以生成一种含有奇点的新的宇宙学解.

关键词 $O(2,2)$ 对偶对称 弦模型 宇宙学解

1 引言

近年来，人们发现对偶对称(Duality Symmetry)作为一种基本的对称在弦理论和超对称场论中扮演了主要的角色[1]. 由于弦理论自然包含了引力相互作用，所以可期望它能用于描述甚早期宇宙的演化. 因此，研究低能弦模型的经典与量子宇宙学性质及其相关的对偶对称性，将是重要而有意义的课题. Veneziano 等人研究了度规、挠率以及 dilaton 背景场下的 $O(d,d)$ 对偶对称的弦宇宙学[2—5]，Sen 研究了 $O(d)\otimes O(d)$ 对偶对称的弦宇宙学、标度因子对偶及两维黑洞的性质[6]. Khastgir 和 Maharana 还分析了弦背景下的蛀洞(Wormhole)解及其拓扑变换性质，并发现对偶对称变换可生成新的蛀洞解[7,8]. 本文主要在 Veneziano 等人提出的对偶宇宙学模型的框架下，研究了3维时空中的度规、挠率、dilaton 场以及 Liouville 势场所满足的宇宙学解. 我们发现，通过 $O(2,2)$ 对偶变换，这些背景场可以生成含奇点的新宇宙学解.

2 具有 $O(d,d)$ 对偶对称的弦运动学方程

Meissner 和 Veneziano 在 1991 年首先导出了低能弦引力耦合 dilaton、挠率场的协变运

1997-09-22收稿，1998-02-18收修改稿
* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助

动方程. 这些方程在 $O(d,d)$ 对偶变换下保持不变；而 $O(d,d)$ 对称群是 Narain 在 1986 年研究低维杂交弦紧致化的模空间性质时引入的[9]. 为了将其用于后面的研究，我们首先考察 D 维时空 $(D=d+1)$ 中如下的低能弦等效玻色作用量[3]：

$$S=\int \mathrm{d}^D x\sqrt{-G}\ \mathrm{e}^{-\phi}\left[-R-G^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}-V(\phi)\right]. \tag{2.1}$$

式中，ϕ是 Fradkin–Tseytlin dilaton[10]，$V(\phi)$是对应的势场，$G_{\mu\nu}$是σ模型度规，$H_{\mu\nu\rho}$是 3 指标张量场，它可由如下的 2 形式场表示

$$H_{\mu\nu\rho}=\partial_\mu B_{\nu\rho}+cycle\ , \tag{2.2}$$

这里，一般假定度规场 G、挠率场 B 仅为时间 t 的函数，而且可以将它们设为如下矩阵形式：

$$G=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & G(t)\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B(t)\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

下面我们采用符号 $G=G(t)$，$B=B(t)$来标记(2.3)式中的 $d\times d$ 矩阵，于是作用量(2.1)式可重新表示成：

$$S=\int \mathrm{d}t\sqrt{\det G}\ \mathrm{e}^{-\phi}\Big\{-V(\phi)-2\partial_0^2(\ln\sqrt{\det G})-(\partial_0\ln\sqrt{\det G})^2+$$
$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\partial_0 G)(\partial_0 G^{-1})+(\partial_0\phi)^2+\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[G^{-1}(\partial_0 B)G^{-1}(\partial B)]\Big\}. \tag{2.4}$$

为了明显地表示出作用量的整体对称性，还可引入如下的 $2d\times 2d$ 矩阵 $M(t)$

$$M(t)=\begin{pmatrix}G^{-1} & -G^{-1}B\\ BG^{-1} & G-BG^{-1}B\end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

并同时定义如下的Φ场

$$\Phi=\phi-\ln\sqrt{\det G} \tag{2.6}$$

根据(2.5)、(2.6)式，可将作用量(2.1)表示成下面的最后形式

$$S=\int \mathrm{d}t\mathrm{e}^{-\Phi}\left\{V(\Phi)+(\dot{\Phi})^2+\frac{1}{8}\mathrm{Tr}[\dot{M}\eta\dot{M}\eta]\right\}, \tag{2.7}$$

上式中的

$$\eta=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

是非对角形式的 $O(d,d)$ 矩阵，I是 d 维单位矩阵，“·”表示对时间的导数. 作用量(2.7)式在如下的整体($O(d,d)$群)变换下保持不变

$$\Phi \rightarrow \dot{\Phi}, \quad M \rightarrow \Omega M \Omega^T \ , \tag{2.9}$$

这里,$\Omega \in O(d,d)$, 且满足

$$\Omega^T \eta \Omega = \eta \ . \tag{2.10}$$

实际上,$O(d,d)$的元$\Omega = \eta$生成一种T对偶变换,它可以看作是弦的环面紧致化中$R \rightarrow \frac{1}{R}$对偶对称的普遍化. 如果将作用量(2.7)式相对于G_{00}进行变分,那么可导致如下的"零能条件":

$$(\dot{\Phi})^2 + \frac{1}{8}\mathrm{Tr}[\dot{M}\eta\dot{M}\eta] - V(\Phi) = 0 \ , \tag{2.11}$$

同时,将作用量(2.7)式相对于Φ、G_{ij}、B_{ij}场进行变分,又可导出以下的运动方程:

$$(\dot{\Phi})^2 - 2\ddot{\Phi} - \frac{1}{8}\mathrm{Tr}[\dot{M}\eta\dot{M}\eta] + \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi} - V(\Phi) = 0 \ , \tag{2.12}$$

$$-\dot{\Phi}\dot{G} + G\partial_0(G^{-1}\dot{G}) - \dot{B}G^{-1}\dot{B} = 0 \ , \tag{2.13}$$

$$\dot{\Phi}\dot{B} - \ddot{B} + \dot{B}G^{-1}\dot{G} + \dot{G}G^{-1}\dot{B} = 0 \ . \tag{2.14}$$

容易证明,上述方程组(2.12)—(2.14)在整个$O(d,d)$对称群作用下保持不变. 此类Meissner–Veneziano方程组可看作是弦修正的 Einstein–Friedmann方程组.

3 具有$O(2,2)$对偶对称的弦宇宙学解

现在着手研究G为2×2对角(单位)矩阵的 Meissner–Veneziano 方程组的宇宙学解. Khastgir 和Kumer曾研究过背景场$B=0$和零势场$V(\Phi)=0$时的$O(2,2)$对偶对称的宇宙学解[11],并讨论了这些解与2维荷电黑洞解的关系. 为了在此方向上获得更进一步的结果,可假设

$$G = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & a(t) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b(t) & 0 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix} . \tag{3.1}$$

容易证明

$$\dot{G} = \dot{a}I, \quad \dot{B} = \dot{b}I, \quad G^{-1} = \frac{1}{a}I \ , \quad B^{-1} = \frac{1}{b}I \ . \tag{3.2}$$

这里I为2×2单位矩阵. 将(3.2)式代入 Meissner–Veneziano方程组(2.11)—(2.14),并经化简得:

$$(\dot{\Phi})^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{b}}{a}\right)^2 - V(\Phi) = 0 \ , \tag{3.3}$$

$$(\dot{\Phi})^2 - 2\ddot{\Phi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{b}}{a}\right)^2 + \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi} - V(\Phi) = 0 \ , \tag{3.4}$$

$$-\dot{\Phi}\dot{a}+\ddot{a}-\frac{(\dot{a})^2}{a}=0\ , \tag{3.5}$$

$$\dot{\Phi}\dot{b}-\ddot{b}+2\frac{\dot{a}\dot{b}}{a}=0\ . \tag{3.6}$$

上述方程组(3.3)—(3.6)不是完全独立的. 为此，令(3.3)与(3.4)二式相减，得

$$2\ddot{\Phi}-\frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi}=0\ . \tag{3.7}$$

方程组(3.5)—(3.7)可唯一确定势场 $V(\Phi)$的行为和 $a(t)$、$b(t)$随时间的演化.

在研究甚早期宇宙中度规场 G 和挠率场 B 随时间演化时，不妨设

$$a(t)=t,\quad V(\Phi)=\mathrm{e}^{2\Phi}\ . \tag{3.8}$$

将(3.8)式中的 $a(t)$和 Liouville 势 $V(\Phi)$代入(3.5)、(3.6)式，能够证明，

$$b(t)=\frac{1}{2}t^2\ ,\Phi=-\ln t\ . \tag{3.9}$$

因此我们发现 Meissner-Veneziano方程组有如下一组宇宙解

$$G=\begin{pmatrix} t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}\frac{t^2}{2} & 0\\ 0 & \frac{t^2}{2}\end{pmatrix},\qquad \Phi=-\ln t\ . \tag{3.10}$$

在这组解中，当 $t=0$ 时 dilaton 场Φ有一奇点，而度规场 G 和挠率场 B 是有限的，而且随时间按幂形式膨胀.

下面我们在此基础上，根据 $O(2,2)$对偶变换生成其对偶形式的宇宙学解. 定义 4×4 矩阵Ω为

$$\Omega=\begin{pmatrix}\Pi & 1-\Pi\\ 1-\Pi & \Pi\end{pmatrix}\ , \tag{3.11}$$

这里，$\Pi=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$为投影算符，它满足性质$\Pi^2=\Pi$，并且

$$\Omega^T\eta\,\Omega=\eta\ . \tag{3.12}$$

将宇宙学解(3.10)式代入(2.5)式中的 4×4 矩阵 $M(t)$得

$$M(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{t}I & -\frac{t}{2}I\\ \frac{t}{2}I & t\left(1-\frac{t^2}{4}\right)I\end{pmatrix}\ , \tag{3.13}$$

其中 I是 2×2 单位矩阵. 对于 M可通过如下的 $O(2,2)$变换以生成其对偶形式的矩阵 M'

$$M'(t)=\Omega M\Omega^T$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{G}^{-1} & -\tilde{G}^{-1}\tilde{B} \\ \tilde{B}\tilde{G}^{-1} & \tilde{G}-\tilde{B}\tilde{G}^{-1}\tilde{B} \end{pmatrix} . \tag{3.14}$$

利用(3.10)、(3.11)、(3.13)及(3.14)式，并经详细计算后求出

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{t\left(1-\dfrac{t^2}{4}\right)} \end{pmatrix} , \tag{3.15}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2\left(1-\dfrac{t^2}{4}\right)} \end{pmatrix} . \tag{3.16}$$

同时，dilaton 场$\tilde{\Phi}$由公式

$$\tilde{\Phi} = \Phi + \frac{1}{2}\ln\frac{\det\tilde{G}}{\det G} \tag{3.17}$$

计算. 将 $\det\tilde{G} = \dfrac{1}{1-\dfrac{t^2}{4}}$，$\det G = t^2$代入(3.17)式，又得

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \ln t - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) . \tag{3.18}$$

比较 Meissner–Veneziano 方程组在 $O(2,2)$ 对偶变换前后的宇宙学解，我们发现有几个重要特点，首先，变换前的解(3.10)式在 $t>0$时都有意义，而变换后的解(3.18)式中使$\tilde{\Phi}$场有意义的时间范围是 $0<t<2$. 其次，对偶变换前后的解在 $t=0$ 都可能有奇异性，因此对偶变换没有去除这类宇宙学原始奇点；但对偶变换后的解具有一个新的特点，即在 $t=2$ 时存在另一个奇点. 这意味着对偶变换可能生成或消除弦宇宙解中的奇点. Veneziano 等人曾研究过与此类似的问题[5]，他们发现，$O(d,d)$ 对偶变换可以用来“抹去(boost away)”宇宙学中或黑洞共形弦背景下存在的物理奇异性；而且特别分析了 $D=4$ 时的 Nappi–Witten共形弦宇宙学模型[12]，并且指出这种模型中的奇异性可以用 $O(3,3)$变换加以“抹去”. 因此，用对偶变换的观点来研究弦宇宙学或黑洞中奇点出现的规律，对于建立一种奇异自由的、较为现实的相对论性宇宙学模型将是非常有意义的.

4 讨论

容易看出，当 $G=\tilde{G}$时，$t=\sqrt{2}$ (<2)是对偶变换前后两组解的一个弱自对偶点，此时

$$G = \tilde{G} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \Phi = \tilde{\Phi} = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} .$$

又当 $t=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1.156(<2)$时，$(\tilde{G})_{22}$元取得极小值，相应的解为

$$\tilde{G}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & \frac{3}{4}\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad \tilde{B}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & -\frac{3}{4}\end{pmatrix},\quad \tilde{\Phi}=\ln\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

从上面结果可知，弱自对偶点 $t=\sqrt{2}$ 大于极小值点 $t\approx 1.156$. 另外，当 $B=\tilde{B}$时，求得另一可能的自对偶点 $t>2$，将使$\tilde{\Phi}$无意义.

本文主要研究了时空维数 $D=3$ 时度规场 G、挠率场 B 取成对角形式的弦宇宙学解. 当然，G、B 场还可取成更一般的矩阵，$V(\Phi)$也可设为更复杂的势场. 此外，在 $D>3$时可能出现的各种弦宇宙学解及其 $O(d,d)$对偶变换还值得进一步探讨. 这些考虑对于深入研究对偶与弦宇宙学的关系将是非常必需的. 而且，本文主要涉及对偶弦模型在经典宇宙学方面的性质，因此，这类模型在量子引力和量子宇宙学方面的意义还有待发掘. 最近，已有文献开始研究 $O(d,d)$协变弦模型与量子宇宙学的性质[13,14]. 通过哈密顿形式下 $O(d,d)$对偶对称的 Wheeler–de Witt方程的构造，可求得相应的宇宙波函数. 同时，由于对偶弦模型中允许存在量子守恒的局域流，而与这些流相关的无穷小生成元满足 Kac–Moody代数[15]，所以，这类模型还可能隐含着其它较为丰富的量子性. 下一步我们将准备研究 $O(d,d)$对偶弦模型中经典宇宙学与量子宇宙学的关系，并希望进一步揭示出对偶对称在弦宇宙学中的深刻的物理含义.

参　考　文　献

[1] Giveon A, Porrati M, Rabionvici E. Phys. Reports, 1994, **244**:77—202

[2] Veneziano G. Phys. Lett., 1991, **B265**:287—294

[3] Meissner K A, Veneziano G. Phys. Lett., 1991, **B267**:33—36

[4] Meissner K A, Veneziano G. Mod. Phys. Lett., 1991, **A6**:3397—3404

[5] Gasperini M, Maharana J, Veneziano G. Phys. Lett., 1992, **B296**:51—57

[6] Sen A. Phys. Lett., 1991, **B271**:295—300

[7] Khastgir S P, Maharana J. Phys. Lett., 1993, **B301**:191—195

[8] Khastgir S P, Maharana J. Nucl. Phys., 1993, **B406**:145—162

[9] Narain K S, Phys. Lett., 1986, **B169**:41—44

[10] Fradkin E S, Tseytlin A A. Phys. Lett., 1985, **B158**:316—322

[11] Khastgir S P, Kumar A. Mod. Phys. Lett., 1991, **A6**:3365—3371

[12] Nappi C R, Witten E. Phys. Lett., 1992, **B293**:309—314

[13] Gasperini M, Maharana J, Veneziano G. Nucl. Phys., 1996, **B472**:349—360

[14] Kehagias A A, Lukas A. Nucl. Phys., 1996, **B477**:549—563

[15] Maharana J. Phys. Rev. Lett., 1995, **75**:205—208

A String Cosmological Solution With $O(2,2)$ Duality Symmetry*

Tao Biyou

(*Technology Institute of Box* 77, *Chengdu* 610066)

Yan Jun

(*Institute of Modern Physics, Southwest Jiao Tong University, Chengdu* 610031)

Qiu Xiaoming

(*Southwestern Institute of Physics, Chengdu* 610041)

Abstract A Lower energy duality string model with time dependent metric, torsion, dilaton background field and Liouville potential field is studied in this paper. A classical string cosmological solution in $D = 3$ space–time dimension is obtained. By means of $O(2,2)$ duality transformation, we find that a new cosmological solution containing singular points can be generated.

Key words $O(2,2)$ duality symmetry, string model, cosmological solution

Received 22 September 1997, Revised 18 February 1998

* Supported by the National Nature Science Foundation of China and the Doctor Fundation of National Education Committee of China