

# 射频四极透镜的聚焦特性\*

郁庆长 郭伟明

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

**摘要** 研究了带电粒子在射频四极透镜中的运动方程,导出了传输矩阵元,讨论了透镜聚焦特性和透镜各参数间的关系.

**关键词** 射频四极透镜 聚焦特性 透镜参数

## 1 引言

静电和静磁的四极透镜通常用于加速器的交变梯度聚焦<sup>[1,2]</sup>. 60年代发展起来的射频四极透镜以时间交变代替空间交变. 二维射频四极透镜用于质谱仪<sup>[3]</sup>. 三维射频四极透镜用作离子陷阱<sup>[4]</sup>. 射频四极加速器(RFQ)把四极场的时间交变和空间调制结合起来,以达到对离子同时进行加速和聚焦的目的<sup>[5]</sup>. 近年来研制的射频聚焦漂移管直线加速器(RFD)运用了时间-空间交变的射频四极透镜<sup>[6,7]</sup>. 本文将对这种透镜的聚焦特性进行研究.

## 2 粒子的运动方程

假定射频四极透镜沿束轴方向( $z$ 方向)按一定规律放置,在每一透镜中电场强度为

$$\begin{cases} E_x = -Gx\cos(\omega t), \\ E_y = Gy\cos(\omega t), \\ E_z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

此处 $\omega$ 为角频率, $t$ 为时间, $G$ 为透镜电场梯度的振幅,

$$G = V/r_0^2, \quad (2)$$

$V$ 为透镜电压的振幅, $r_0$ 为透镜孔半径. 对于 $t=0$ ,当 $G > 0$ 时透镜在 $x$ 方向聚焦, $G < 0$ 时在 $y$ 方向聚焦,交替放置这两种透镜即可在两方向聚焦.

1998-03-03收稿

\* 国家攀登计划项目

带电粒子在透镜中的横向运动方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{eGx}{m_0c^2\beta^2\gamma} \cos(\omega t) = 0, \\ \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{eGy}{m_0c^2\beta^2\gamma} \cos(\omega t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

此处  $m_0$  为粒子的静止质量,  $c$  为光速,  $\beta$  为粒子速度与光速的比,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

为方便起见改用射频相位  $\varphi = \omega t$  作自变量,

$$d\varphi = \frac{2\pi}{\beta\lambda} dz, \quad (4)$$

$\lambda$  为射频波的波长. 令

$$Q = \frac{eG\lambda^2}{4\pi^2 m_0c^2\gamma}, \quad (5)$$

得

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\varphi^2} + Q\cos\varphi x = 0, \\ \frac{d^2y}{d\varphi^2} - Q\cos\varphi y = 0. \end{cases} \quad (6)$$

$$\quad (7)$$

由于  $x$  与  $y$  方向运动方程的类似性, 以下将只讨论  $x$  方向的运动方程.

### 3 运动方程的解

这一运动方程是 Mathieu 方程的特例. 关于 Mathieu 方程的解法可参考文献 [8]. 按习惯将波动量写作复数形式, 此时复数量  $\tilde{x}$  的实部为实际的物理量  $x$ . 令

$$\tilde{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_n e^{i(\nu+n)\varphi}, \quad (8)$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\varphi^2} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\nu+n)^2 \tilde{a}_n e^{i(\nu+n)\varphi}. \quad (9)$$

代入式 (6), 得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (\nu+n)^2 \tilde{a}_n - \frac{Q}{2} \tilde{a}_{n-1} + \frac{Q}{2} \tilde{a}_{n+1} \right] e^{i(\nu+n)\varphi} = 0. \quad (10)$$

由此获得无穷个线性方程

$$\frac{Q}{2(\nu+n)^2} \tilde{a}_{n-1} - \tilde{a}_n + \frac{Q}{2(\nu+n)^2} \tilde{a}_{n+1} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \quad (11)$$

解这些方程可得  $v$  和  $\bar{a}_n$  (保留一常数  $\bar{a}_0$ )。令

$$a_{n+} = (\bar{a}_n + \bar{a}_{-n}) / \bar{a}_0, \quad a_{n-} = (\bar{a}_n - \bar{a}_{-n}) / \bar{a}_0, \quad (12)$$

$$\tilde{x} = \bar{a}_0 e^{i\nu\varphi} (1 + a_{1+} \cos\varphi + ia_{1-} \sin\varphi + a_{2+} \cos 2\varphi + ia_{2-} \sin 2\varphi + \cdots). \quad (13)$$

设  $\bar{a}_0 = Ae^{i\psi}$ ,

$$x = A[\cos(\nu\varphi + \psi) S_1(\varphi) - \sin(\nu\varphi + \psi) S_2(\varphi)],$$

$$x' = \frac{dx}{dz} = \frac{\beta\lambda}{2\pi} \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\beta\lambda A}{2\pi} [\cos(\nu\varphi + \psi) S_3(\varphi) - \sin(\nu\varphi + \psi) S_4(\varphi)], \quad (14)$$

此处

$$\begin{aligned} S_1(\varphi) &= 1 + a_{1+} \cos\varphi + a_{2+} \cos 2\varphi + \cdots; & S_2(\varphi) &= a_{1-} \sin\varphi + \cdots; \\ S_3(\varphi) &= -a_{1+} \sin\varphi - 2a_{2+} \sin 2\varphi + \cdots; & S_4(\varphi) &= \nu + (\nu a_{1+} + a_{1-}) \cos\varphi + \cdots. \end{aligned} \quad (15)$$

设粒子在透镜入口处  $\varphi, x, x'$  值为  $\varphi_0, x_0, x'_0$ , 代入式 (14) 可求出  $\psi, A$  值. 再将  $\psi, A$  和粒子在透镜出口处的  $\varphi$  值代入式 (14) 可求出粒子在透镜出口处的  $x, x'$  值.

在  $Q$  不太大时  $\nu$  可由近似公式计算:

$$\sin(\nu\pi) \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} Q. \quad (16)$$

当  $|Q| \leq \sqrt{2}/\pi$  时  $\nu$  为实数. 取  $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ . 由式 (11) 可估计  $\bar{a}_n$  的量级:

$$\bar{a}_n / \bar{a}_0 \approx Q^n / 2^n (n!)^2. \quad (17)$$

略去  $|n| > 2$  的  $\bar{a}_n$ , 并由式 (11) 得

$$a_{1+} \approx \frac{2\nu^2}{Q}, \quad a_{1-} \approx -2\nu Q, \quad a_{2+} \approx \frac{Q^2}{8}, \quad a_{2-} \approx 0. \quad (18)$$

## 4 传输矩阵

设透镜入口处  $\varphi = \varphi_0, x = 1, x' = 0$ , 代入式 (14) 可解出

$$\psi = \psi_1 = \text{tg}^{-1}(S_3(\varphi_0) / S_4(\varphi_0)) - \nu\varphi_0,$$

$$A = A_1 = [\cos(\nu\varphi_0 + \psi_1) S_1(\varphi_0) - \sin(\nu\varphi_0 + \psi_1) S_2(\varphi_0)]^{-1}. \quad (19)$$

又设透镜入口处  $\varphi = \varphi_0, x = 0, x' = 1$  代入式 (14) 可解出

$$\psi = \psi_2 = \text{tg}^{-1}(S_1(\varphi_0) / S_2(\varphi_0)) - \nu\varphi_0,$$

$$A = A_2 = \frac{2\pi}{\beta\lambda} [\cos(\nu\varphi_0 + \psi_2) S_3(\varphi_0) - \sin(\nu\varphi_0 + \psi_2) S_4(\varphi_0)]^{-1}. \quad (20)$$

由此可导出射频四极透镜  $x$  方向区间  $(\varphi_0, \varphi)$  的一阶传输矩阵:

$$M_x = \begin{pmatrix} M_{x11} & M_{x12} \\ M_{x21} & M_{x22} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

此处

$$\begin{aligned} M_{x11} &= A_1 [\cos(v\varphi + \psi_1) S_1(\varphi) - \sin(v\varphi + \psi_1) S_2(\varphi)], \\ M_{x12} &= A_2 [\cos(v\varphi + \psi_2) S_1(\varphi) - \sin(v\varphi + \psi_2) S_2(\varphi)], \\ M_{x21} &= \frac{\beta\lambda A_1}{2\pi} [\cos(v\varphi + \psi_1) S_3(\varphi) - \sin(v\varphi + \psi_1) S_4(\varphi)], \\ M_{x22} &= \frac{\beta\lambda A_2}{2\pi} [\cos(v\varphi + \psi_2) S_3(\varphi) - \sin(v\varphi + \psi_2) S_4(\varphi)]. \end{aligned} \quad (22)$$

$M_{x11}$  为透镜的线性放大系数,  $M_{x22}$  为透镜的角放大系数,  $M_{x21}$  为透镜的聚焦或散焦本领 ( $M_{x21} < 0$  时聚焦,  $M_{x21} > 0$  时散焦). 下面将讨论它们与透镜强度、透镜长度以及透镜中点射频相位的关系. 透镜强度可用  $Q$  描述, 透镜长度

$$L = \frac{\beta\lambda}{2\pi} \Delta\varphi, \quad (23)$$

此处

$$\Delta\varphi \equiv \varphi - \varphi_0. \quad (24)$$

透镜中点射频相位是粒子通过透镜中点时的相位,

$$\varphi_m = \frac{1}{2} (\varphi_0 + \varphi). \quad (25)$$

为方便起见在以下讨论中将略去传输矩阵元的下标  $x$ , 并以  $m$  代替  $M_{21}$ ,

$$m = \frac{2\pi}{\beta\lambda} M_{21}. \quad (26)$$

## 5 透镜聚焦特性与透镜强度的关系

讨论最常用的半周期透镜, 其长度

$$L = \frac{1}{2} \beta\lambda \quad \text{即} \quad \Delta\varphi = \pi. \quad (27)$$

图 1(a) 表示  $\varphi_m = 0$  时这种透镜  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  和  $m$  随  $Q$  的变化. 可以看出当  $|Q| < 0.25$  时  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  和  $m$  与  $Q$  的关系基本上是线性的. 随着  $|Q|$  的增加  $Q$  的高次项的作用逐渐增大, 非线性逐渐严重. 本文的计算只包含了  $Q$  的一次和二次项, 因此在  $|Q| > 0.4$  时本文的结果将难以运用.

## 6 透镜聚焦特性与透镜长度的关系

讨论  $\varphi_m = 0$ ,  $Q = \pm 0.1$  的射频四极透镜聚焦特性与透镜长度的关系. 由图 1(b) 可

看出,随着 $\Delta\varphi$ 的增加 $|m|$ 增加,到 $\Delta\varphi = \pi$ 时 $|m|$ 取最大值.  $\Delta\varphi$ 继续增加 $|m|$ 反而减少,这是由于 $\Delta\varphi > \pi$ 时聚焦透镜的两端因射频相位反向变为散焦,而散焦透镜两端变为聚焦.  $M_{11}, M_{22}$ 的变化趋势与 $m$ 相同,但 $|M_{11}|, |M_{22}|$ 取最大值处 $\Delta\varphi > \pi$ .

半周期透镜( $\Delta\varphi = \pi$ )不仅 $|m|$ 大,还具有以下两个优点,因此常被使用:

- (1)  $m$ 值对透镜长度的变化不敏感;
- (2) 透镜两端边缘场的影响很小.

## 7 透镜聚焦特性与透镜中点射频相位的关系

讨论 $Q = 0.1$ 的半周期透镜聚焦特性与 $\varphi_m$ 的关系. 显然 $\varphi_m = 0$ 时聚焦作用最强, $\varphi_m = 180^\circ$ (相当于 $Q = -0.1, \varphi_m = 0^\circ$ )时散焦作用最强(图 1(c)). 由于三条曲线都近似于余弦曲线,在对半周期透镜作近似计算时可使用下述近似公式:

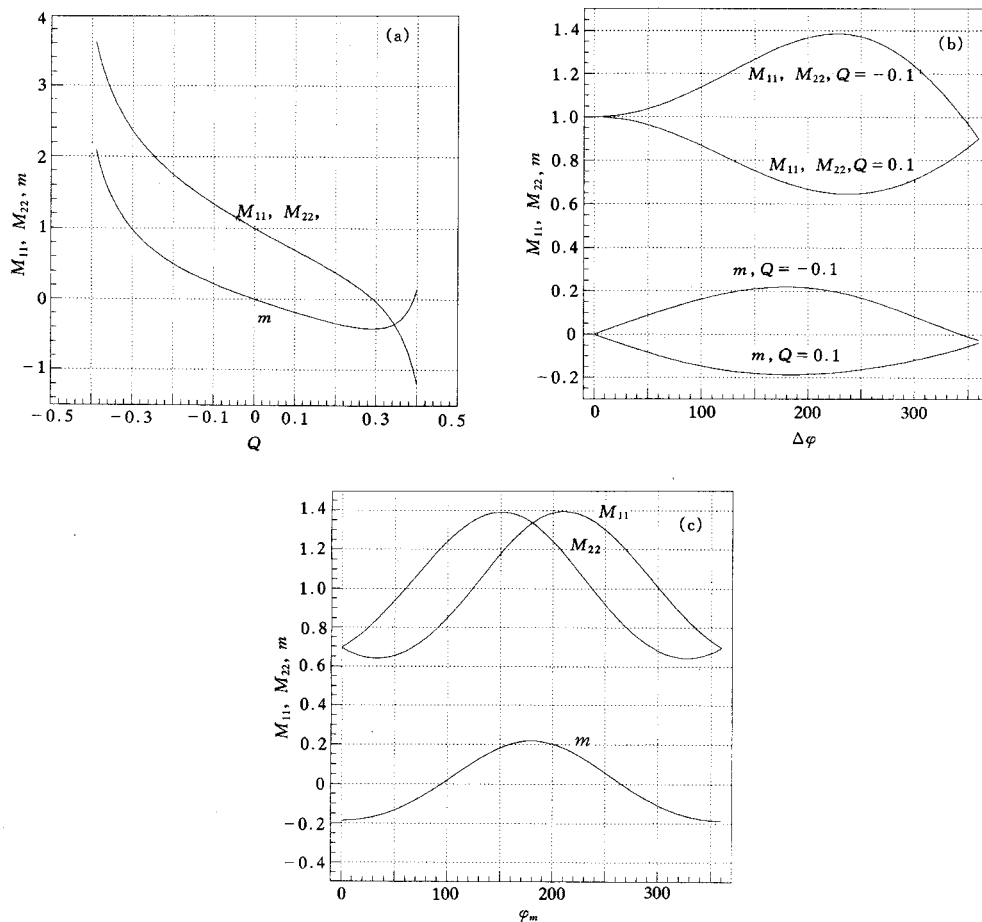


图 1 射频四极透镜聚焦特性随  $Q, \Delta\varphi$  和  $\varphi_m$  的变化

(a)  $\Delta\varphi = 180^\circ, \varphi_m = 0$ ; (b)  $\varphi_m = 0$ ; (c)  $Q = 0.1, \Delta\varphi = 180^\circ$ . 图中  $\Delta\varphi, \varphi_m$  均以  $(^\circ)$  为单位.

$$\begin{aligned}
 M_{11} &\approx 1 - 4Q\cos(\varphi_m - 30^\circ), \\
 M_{22} &\approx 1 - 4Q\cos(\varphi_m + 30^\circ), \\
 m &\approx -2Q\cos\varphi_m.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

## 8 结语

对于低能质子和重离子, 电透镜的聚焦能力大于磁透镜. 因此射频四极透镜能在这方面获得应用.

目前我们正进行小型质子治疗直线加速器的设计研究, 并拟在 1—10MeV 段采用 RFD 加速结构. 本文的理论将用于它的设计计算.

### 参 考 文 献

- 1 Courant E D, Livingston M S, Snyder H S. Phys. Rev., 1952, **88**:1190
- 2 Hawkes P W. Quadruple Optics. Heidelberg: Springer Verlag, 1966
- 3 Dawson P H. Quadruple Mass Spectrometry and its Applications. Amsterdam: Elsevier, 1976
- 4 Paul W. Rev. Mod. Phys., 1990, **62**:531
- 5 Stokes R H, Wangler T P. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1998, **38**:97
- 6 Swenson D A et al. 1995 Particle Accelerator Conf., USA: Dallas, 1995. 342
- 7 Zenin V A et al. 1994 Linac Conf., Japan: Tsukuba, 1994. 158
- 8 Wang Zhuxi, Guo Dunren. Special Functions (in Chinese). Beijing: Science Press, 1979. Chap.12  
(王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 科学出版社, 1979. 第十二章)

## Focusing Properties of Radio-Frequency Quadrupole Lenses\*

Yu Qingchang Guo Weiming

(Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039)

**Abstract** In this paper the equations of motion for charged particles in radio-frequency quadrupole lenses are studied, the transfer matrix elements are derived and the relations between the focusing properties of the lenses and the lens parameters are discussed.

**Key words** radio-frequency quadrupole lens, focusing property, lens parameter

Received 3 March 1998

\* Supported by the National Climb Plan