

# 电子束的绝热展开\*

杨晓东 宋明涛 夏佳文 魏宝文 吴军丽

(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

**摘要** 考虑空间电荷效应,用数值方法模拟计算了电子束绝热展开过程. 当初始磁感应强度与最终磁感应强度之比为  $K$  时,电子束横向温度由初始值  $T_{\perp i}$  降低  $T_{\perp i}/K$ . 研究了不同能量、不同流强的电子束达到预期的绝热展开倍数所需的最低磁感应强度.

**关键词** 电子冷却 绝热展开 温度

## 1 引言

电子冷却<sup>[1]</sup>为一种降低储存环中离子束相空间值的方法,冷却过程基于以相同平均速度运动的冷电子束与离子束相互重叠,由于库仑作用引起能量损失来降低离子束在以平均速度运动的坐标系中的速度分散,从而降低离子束的横向发射度及动量分散. 在电子冷却装置中,电子束的温度是一个非常重要的参数. 为了增强冷却力和缩短冷却时间,降低电子束横向温度为一个可行的有效途径. 当电子束在一个缓慢减小的磁场中运动时,其横向能量转化为纵向能量,从而降低电子的横向温度.

## 2 电子冷却基本概念

当离子与电子达到相同速度时,二者能量之间存在关系:  $E_e(\text{keV}) = 0.5486E_m(\text{MeV}/u)$ . 在电子冷却储存环中,电子束的温度是一个非常重要的参数<sup>[2]</sup>. 横向温度  $k_B T_{\perp} = m(\Delta_{\perp})^2 = m(\langle v_{\perp}^2 \rangle - \langle v_{\perp} \rangle^2)$ , 纵向温度  $k_B T_{\parallel} = m(\Delta_{\parallel})^2 = m(\langle v_{\parallel}^2 \rangle - \langle v_{\parallel} \rangle^2)/2$ , 其中,  $v_{\perp}$  和  $v_{\parallel}$  分别表示电子横向和纵向速度,  $\Delta$  为速度分散,  $k_B$  为玻尔兹曼常数.

从冷却时间的公式<sup>[3]</sup>(1)中可以看出,对于给定能量的离子,冷却时间依赖于冷却段长度和电子密度. 冷却段长度在储存环中是给定的,电子密度受到电子枪的影响,而空间电荷作用又引起了温度的升高,这就限制了可使用的电流密度  $n_e$ .

$$\tau_{\perp, \parallel}(s) = \frac{\beta^4 \gamma^2}{6\pi c L_C r_p Z^2} \frac{A m_e c^3}{\eta n_e} \cdot \begin{cases} \gamma^3 \Theta_{\perp} \\ \Theta_{\parallel} \end{cases} \quad (1)$$

1999-08-11 收稿, 2000-02-06 收修改稿

\* 国家重大科学工程 HIRFL-CSR 冷却储存环项目资助

其中  $A, Z$  是离子质量数和电荷数,  $\gamma, \beta$  是相对论因子,  $\Theta$  是离子束在冷却段的发散角,  $n_e$  为电子束密度,  $c$  为光速,  $r_p$  为质子经典半径,  $L_C$  为库仑对数<sup>[1]</sup>,  $\eta$  为冷却段长度与储存环周长之比,  $m_e$  为电子质量. 纵向和横向冷却力与电子束横向速度分散(温度)之间的关系<sup>[3]</sup>如下,

$$F_{\parallel} \propto Z^2 n_e L_C \cdot \begin{cases} \frac{1}{v^{*2}} & v^* \gg \Delta_{\perp} \\ \frac{1}{\Delta_{\perp}^2} & \Delta_{\parallel} < v^* < \Delta_{\perp} \\ \frac{v^*}{\Delta_{\parallel} \Delta_{\perp}^2} & v^* \ll \Delta_{\parallel} \end{cases} \quad (2)$$

$$F_{\perp} \propto Z^2 n_e L_C \cdot \begin{cases} \frac{1}{v^{*2}} & v^* \gg \Delta_{\perp} \\ \frac{1}{\Delta_{\perp}^3} & \Delta_{\parallel} < v^* < \Delta_{\perp} \\ \frac{v^*}{\Delta_{\perp}^3} & v^* \ll \Delta_{\parallel} \end{cases} ,$$

式中  $v^*$  为运动坐标系中离子与电子间的相对速度. 从(2)和(3)式中可以看出, 在高相对速度情况下, 冷却力与电子温度无关; 在低相对速度下, 纵向冷却力正比于  $T_{\parallel}^{-1}$ , 横向冷却力正比于  $T_{\perp}^{-3/2}$ .

静电加速后, 电子的横向温度与电子枪热阴极温度相同, 大约为 0.1eV. 而纵向温度被压缩, 大约为 0.1meV. 如果能够保持电子密度不变, 则横向温度降低 10 倍, 冷却力将增加 10—30 倍<sup>[4]</sup>. 另一方面, 可以通过电子束的绝热展开控制电子束的尺寸大小, 以便优化冷却时间.

### 3 绝热展开的理论分析

#### 3.1 绝热展开引起的温度变化

由经典电动力学<sup>[5]</sup>可知, 如果  $q_j$  和  $p_j$  是广义的正则坐标和正则动量, 那么对每一个周期性坐标来说, 作用量积分  $J_j = \oint p_j dq_j$ . 积分遍及坐标  $q_j$  的一完整周期. 对一个给定的具有已知初始条件的力学系统来说, 作用量积分是常量. 可以证明<sup>[6]</sup>, 如果系统性质的变化比有关的运动周期缓慢, 并且与周期无关, 那么作用量积分就是不变量.

对处于磁感应强度为  $B$  的均匀静磁场中的带电粒子而言, 其横向运动是周期性的, 横向运动的作用量积分为  $J = \oint \mathbf{p}_{\perp} \cdot d\mathbf{l}$ , 其中,  $\mathbf{p}_{\perp}$  为正则动量的横向分量,  $d\mathbf{l}$  是粒子圆形路线上的矢量线元. 可以得到  $J = \gamma m \omega_B \pi a^2 = (B \pi a^2) e / c$ , 其中,  $B \pi a^2$  为穿过粒子轨道的磁通量.

如果粒子在磁场的空间或时间变化都很缓慢的区域内运动,则  $J$  的绝热不变式意味着穿过粒子轨迹的磁通量保持不变,可以用粒子的轨道半径、横向动量、磁矩等几种不同的术语来表达.

对于独立的单个粒子,用横向能量表达为  $E_{\perp}/B$  是不变量,电子在磁场中运动的一个典型参数就是电子的回转波长  $\lambda$ ,  $\lambda = 2\pi m \sqrt{2eV_a/m} / (eB)$ , 其中  $V_a$  为加速电压. 将波长作为比较磁场变化快慢的参数,则绝热参数为

$$\xi = \left| \frac{dB}{dZ} \right| \frac{\lambda}{B} \ll 1, \quad (4)$$

其中  $\frac{dB}{dZ}$  为磁场纵向梯度.

对于强流电子束,由于电子间强烈的耦合作用,库仑散射破坏了单个粒子轨道磁矩的绝热不变性,但是对于电子的组合来说,可以获得一个等效的不变量,即将所有电子的  $E_{\perp}/B$  相加之和仍为一个绝热不变量,当轴上磁感应强度从初始值  $B_i$  降低到最终值  $B_f$  时,横向能量  $E_{\perp}$  降低为  $E_{\perp} = E_{\perp i} B_f / B_i$ .

由横向温度的定义  $k_B T_{\perp} = \langle E_{\perp} \rangle$ , 可以得出

$$T_{\perp} = \frac{B_f}{B_i} T_{\perp i} = \frac{T_{\perp i}}{K} \quad (5)$$

电子轨道所包含的磁通量也是一个守恒量,束流半径的变化关系为  $R_f = R_i \sqrt{B_i/B_f}$ , 将  $K = B_i/B_f$  称为展开因子,下标  $i, f$  分别表示初始和末了时刻.

### 3.2 空间电荷作用

均匀电子束产生的径向电场与约束电子束的纵向磁场形成交叉场,引起电子的  $E \times B$  漂移,电子束像一个刚体一样慢慢转动,不同半径上电子的漂移速度  $v_d$  为

$$v_d = \frac{Ir}{2\pi\epsilon_0 \gamma^2 v_{\parallel} BR_b^2}, \quad (6)$$

其中  $I$  为电子束电流,  $r$  为电子在束流中的径向坐标,  $\epsilon_0$  为真空介电常数,  $R_b$  为电子束半径.

电子横向速度为绕着束轴的慢旋转和绕着磁力线快旋转的矢量和,电子束的横向能量是快运动和慢运动两项的贡献. 在一个独立的螺旋线轨道的各处,快旋转的速度方向是变化的,而慢旋转的速度方向始终一致. 慢旋转的速度随着电流的增大和约束磁场的减小而增大,随着纵向速度的增加而减小. 对于给定能量、流强的电子束,只有提高磁感应强度才能降低漂移速度.

如果电子束流强保持不变,从式(6)中可以得到

$$v_d \propto \frac{r}{R_b^2 B}, \quad (7)$$

当阴极半径为  $R_b$ , 磁感应强度为  $B$  时,漂移速度为

$$v_{d1} = C \frac{r}{R_b^2 B} \quad (0 \leq r \leq R_b), \quad (8)$$

而当阴极半径为  $R_b/\sqrt{K}$ , 磁感应强度为  $KB$  时, 漂移速度为

$$v_{d2} = C \frac{r}{\left(\frac{R_b}{\sqrt{K}}\right)^2 KB} = C \frac{r}{R_b^2 B} \quad \left(0 \leq r \leq \frac{R_b}{\sqrt{K}}\right), \quad (9)$$

即绝热展开不改变漂移速度<sup>[7]</sup>.

由于慢旋转的速率是由电场和磁场共同决定的, 所以在不同半径处具有不同的值. 当磁感应强度足够大时, 即使位于电场最大的束流边界上的最外层电子, 其漂移速度也可以降低到低于阴极发射出的电子的热运动速度

## 4 绝热展开的实现

在电子冷却装置中, 采用两个直螺线管施加不同的电流可以产生梯度磁场. 图 1 为螺线管内的磁力线分布的示意图, 图 2 为这个螺线管轴上磁感应强度分布及给定能量的电子的绝热参数. 电子的回转波长  $\lambda$  与电子纵向速度  $v_{\parallel}$  成正比, 与磁感应强度成反比, 即在低能、强磁场情况下, 波长很小. 绝热参数  $\xi$  与磁场梯度成正比, 与磁感应强度成反比, 电子在具有纵向梯度的磁场中运动, 其波长是变化的. 磁场梯度与展开区域的长度有关.

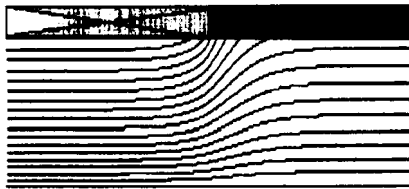


图 1 绝热展开区域的磁力线

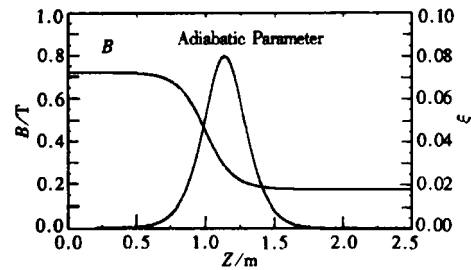


图 2 螺线管对称轴上磁感应强度分布及给定能量的电子的绝热参数

对于一个特定的电子冷却装置而言, 最高的工作能量是确定的. 为了使电子束在冷却段不增加横向能量, 冷却段最低的工作磁感应强度  $B_f$  也是确定的. 只有调节展开区域的长度来降低磁场梯度, 以满足绝热变化的要求.

## 5 绝热展开的模拟计算

为了计算电子轨迹, 必须获得磁场在空间的分布, 采用旁轴展开的方法由轴上磁感应强度获得束流区域的横向和纵向分量. 在空间一点, 电子的初始横向速度的幅值定为阴极热温度  $0.1\text{eV}$  对应的速度值. 最低磁感应强度值与冷却段的磁感应强度值是一致的, 最高磁感应强度值  $B_i$  由展开因子决定. 展开长度是磁场由均匀的最高值变化到最低值的纵向长度, 它由电子的纵向能量、磁场梯度和绝热参数来决定, 以保证在这样的展开长

度里达到预期的展开效果,绝热参数尽可能小.

对于给定能量、给定流强、给定尺寸的电子束,用期望展开的最大倍数,来优化磁场的设置,以达到可工作的最小的最终磁感应强度、最短的展开长度和合适的绝热参数.

图 3 给出了以能量为 400MeV/u 的离子为参考,在给定电流、展开因子和磁场设置的情况下,最外层电子横向能量随离子能量的变化规律.可以看出,当离子能量与最佳磁场设置不匹配时,由于绝热参数的变化,展开后最外层电子的横向能量偏离了预期的值.

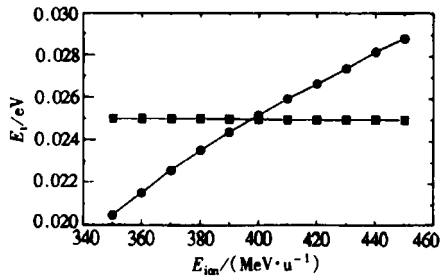


图 3 最外层电子横向能量随离子能量的变化规律  
—■—理论期望值, —●—计算值.

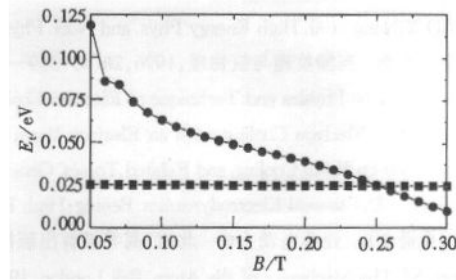


图 4 最外层电子横向能量随最低磁感应强度的变化规律  
符号说明同图 3.

最外层电子横向能量随最低磁感应强度的变化(图 4)表明,最低磁感应强度的变化不仅引起了绝热参数的变化,而且改变了横向漂移速度,导致了展开后最外层电子横向能量的变化.图 5 为以流强为 4A 的电子束为参考,展开后最外层电子横向能量随电子束电流的变化规律.电子束电流决定空间电荷场的大小,进而影响横向漂移速度.给定电子束能量和磁感应强度,漂移速度随电子束流强的增大而增大.

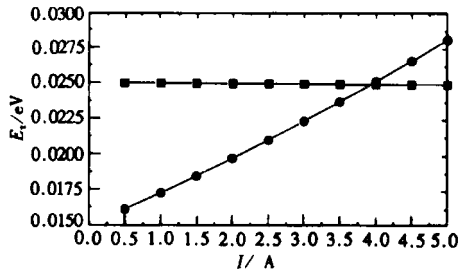


图 5 最外层电子横向能量随电子束流强的变化规律  
符号说明同图 3.

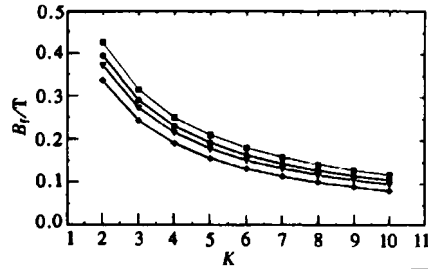


图 6 最低磁感应强度随展开因子的变化规律  
—■— I = 4A, —●— I = 3A,  
—▼— I = 2A, —◆— I = 1A.

图 6 为不同电子流强下达到预期展开效果,最低磁感应强度随展开因子的变化规律.为了保持最外层电子横向漂移速度不变,  $B \sqrt{K}$  必须为常数,展开因子越大,要求的最低磁感应强度越小.

## 6 结论

在合适的磁场和展开长度设置下,绝热展开能够降低横向温度. 当初始磁感应强度与最终磁感应强度之比为  $K$  时,电子束横向温度由初始值  $T_{\perp i}$  降低为  $T_{\perp i}/K$ . 绝热展开受到最高磁感应强度、展开长度以及电子冷却系统工作电流的限制.

### 参考文献 (References)

- 1 Bosser J. Electron Cooling. In: Turner S. CERN95-06, Vol. 2. Geneva: CERN, 1995, 673—730
- 2 RAO YiNong et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1996, 20(4): 369—375  
(饶亦农等. 高能物理与核物理, 1996, 20(4): 369—375)
- 3 Meshkov I N. Physics and Technique of Electron Cooling. Tokyo: RIKEN-AF-AC-2, 1997
- 4 Danared H. Electron Cooling with an Electron Beam of 10 meV Transverse Temperature. In: Bosser J. Proceedings of Workshop on Beam Cooling and Related Topics. Geneva: CERN(94-03), 1994, 322—326
- 5 Jackson J D. Classical Electrodynamics. Beijing: High Education Press (in Chinese), 1983  
(杰克逊 J D. 经典电动力学. 北京: 高等教育出版社, 1983)
- 6 Born M. The Mechanics of the Atom, Bell London, 1927
- 7 Bosser. J. Some Issues of the Electron Beam Neutralization and of the Magnetic Expansion on the Transverse Velocity. Geneva: CERN PS/AR/Note 96-20, 1996

## Adiabatic Expansion of Electron Beam \*

YANG XiaoDong SONG MingTao XIA JiaWen WEI BaoWen WU JunLi  
(Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

**Abstract** The temperature of electron beam is an important parameter in electron cooling device. Transverse temperature will be reduced when an electron beam passes through a negative gradient magnetic field. Some theoretical approaches on adiabatic expansion are presented here. Adiabatic expansion of the electron beam moving in different magnetic fields with different energy and current was investigated by computer simulation. The results show that the transverse temperature of the electron beam is reduced by a factor equal to the ratio between the initial and final magnetic field strengths, provided that the field change is adiabatic with respect to the cyclotron motion of the electrons.

**Key words** electron cooling, adiabatic expansion, temperature

---

Received 11 August 1999, Revised 6 February 2000

\* Supported by HIRFL-CSR Project, Lanzhou, China