第25卷 第10期 高能物理与核物理 Vol.25, No.10
2001年10月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct.,2001

二维可积系统的求迹公式和周期轨道的量子化*

宋建军[2] 李希国[1,2]

1(兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心 兰州 730000)

2(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

摘要 从 Berry-Tabor 求迹公式出发,导出了二维可积系统周期轨道作用量的半经典量子化条件.利用此量子化条件,考虑周期轨道满足的周期条件,得到了二维无关联四次振子系统周期轨道作用量的半经典量子化条件,并给出了半经典能级公式.对能级与周期轨道的对应关系做了分析.

关键词 求迹公式 周期轨道 作用量量子化 半经典能级

1 引言

在量子理论建立初期,Bohr 从他的量子化条件出发,成功地给出了氢原子的能级公式,后来,Sommerfeld 将其推广,得到所谓的 Bohr-Sommerfeld 量子化条件。1917 年,Einstain 注意到相空间中不变环面的存在对实现 Hamilton 系统量子化的重要性,给出了 N 维不变环面上 N 个互不等价的拓扑环的作用量量子化条件[1].后来,在 Einstein 和 Brillouin[2] 工作的基础上,Keller 从量子力学方程出发,得到一个既适用于可分离变量系统又适用于不可分离变量系统的量子化条件[3].由于不可分离系统的相对复杂性,他的理论一般只被用来进行可分离变量系统的量子化.但是对于二维或二维以上的可积系统,由于没考虑周期轨道所必须满足的周期条件,Keller 的理论仍然只是周期轨道量子化的必要条件,这一点在后面将会详细论述.

20 世纪 60 年代末,Gutzwiller 从 Schrödinger 方程出发,运用 Fynman 路径积分和稳相近似,导出了混沌系统的求迹公式,并给出了周期轨道作用量的半经典量子化条件,对混沌系统的周期轨道进行了量子化[4].但是,在混沌系统周期轨道作用量量子化的过程中,他没有考虑周期条件,因而给出的量子周期轨道实际上也包含了非周期轨道.

最近,L.S.F.Olavo 利用他的三个假定,从经典力学出发,导出了 Schrödinger 方程和 Bohr-Sommerfeld量子化条件,指出满足Bohr-Sommerfeld量子化假设的周期轨道是在相空间

2000-10-17 收稿

* 国家教委留学回国人员基金,近代物理研究所所长基金和科学院"百人计划"基金和国家重点基础研究发展规化(G20000774)资助

中发现粒子几率最大或最小的区域[5]．但是，和 Keller 一样，对于二维和二维以上的系统，他给出周期轨道量子化条件时仍未考虑轨道的周期条件．

本文从二维可积系统的 Berry-Tabor 求迹公式出发，参照 Gutzwiller 推导二维混沌系统周期轨道量子化条件时使用的方法，导出了二维可积系统周期轨道半经典量子化条件．利用此量子化条件，考虑周期轨道满足的周期条件，得到了二维无关联四次振子系统周期轨道作用量的半经典量子化条件，并给出了系统半经典能级公式，在此基础上分析了能级与周期轨道间的对应．

2　周期轨道半经典量子化条件的导出

二维可积系统的 Berry-Tabor 求迹公式是 Berry 和 Tabor 在作用量－角动量坐标下导出的[6]，后来 Denis Ullmo 得到了一个更简洁的形式[7]：

$$\rho_M^{sc}(E)=\frac{T_M}{\pi\hbar^{3/2}M_2^{3/2}\left|g''_E\right|^{1/2}}\cos\left(\frac{S_M^0}{\hbar}-\frac{\eta_M\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\tag{1}$$

其中，T_M，S_M^0，η_M 分别是周期轨道的周期、作用量、Maslov 指数．(1)式给出了半经典近似下，具有拓扑指数(M_1,M_2)的二维有理环面 M 上的一条原始周期轨道（只有一个周期长度的周期轨道）对系统态密度的贡献．这个系统相空间中的有理环面有两个不等价的拓扑圆，拓扑指数(M_1,M_2)表示系统沿周期轨道运动一周，系统在每一个不等价拓扑圆上分别运动了 M_1，M_2 周．

采用和 Gutzwiller 导出二维混沌系统周期轨道作用量量子化条件相似的方法[4]，考虑到系统在一条周期轨道上可以运动 $n(n=1,2\cdots)$ 个周期而不止一个周期，这条周期轨道对态密度的总贡献为

$$\begin{aligned}\rho_M^{sc}(E)&=\sum_n\frac{T_M}{\pi\hbar^{3/2}M_2^{3/2}\left|g''_E\right|^{1/2}}\cos\left(\frac{nS_M^0}{\hbar}-\frac{n\eta_M\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\\&\mathrm{Re}\left\{\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\frac{T_M}{\pi\hbar^{3/2}M_2^{3/2}\left|g''_E\right|^{1/2}}\sum_n\exp\left(\frac{\mathrm{i}nS_M^0}{\hbar}-\frac{\mathrm{i}n\eta_M\pi}{2}\right)\right\}.\end{aligned}\tag{2}$$

使用公式 $\sum_n x^n=\frac{x}{1-x}$，由(2)式得到

$$\rho_M^{sc}(E)=\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\frac{T_M}{\pi\hbar^{3/2}M_2^{3/2}\left|g''_E\right|^{1/2}}\left[\frac{\cos(S_M^0/\hbar-\eta_M\pi/2)}{\sin(S_M^0/\hbar-\eta_M\pi/2)}+i\right]\right\},\tag{3}$$

(3) 式表示当周期轨道的作用量和 Maslov 指数满足条件

$$S_M^{0q}=(m+\eta_M/4)h\qquad(m\text{ 取整数},q\text{ 表示量子化})\tag{4}$$

时，此周期轨道导致态密度取奇点（一个无穷大的半经典态密度），即对应一个可能的量子能级．1958 年，Keller 从量子力学方程出发，也曾得到过类似的公式[3]，但是对于二维可积系统，他没有注意到这一公式仅仅给出了周期轨道作用量量子化的必要条件．(3) 式说明周期轨道作用量只能取一些分立值，不是任意能量下的周期轨道的作用量都导致态密度函数成为奇点．另外，(4) 式是对周期轨道的作用量进行量子化，因此，在作用量量子化过程中，必须考虑周期轨道的周期条件，而不同的系统其周期条件是不同的．我们以二

维无关联四次振子为例来进行周期轨道的量子化.

二维无关联四次振子系统是一个二维的可积系统,它的 Hamiltonian 为[7]

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + a\left(\frac{q_1^4}{b} + bq_2^4\right),$$

其中 a,b 是常数. 有理环面 $M(M_1, M_2)$上的周期轨道满足周期条件

$$M_1 T_1 = M_2 T_2,$$

其中,T_1,T_2 分别为四次振子在每一个不等价拓扑环上运动的周期(T_1,T_2 的表达式参看文献[7]),将 T_1,T_2 带入,可得周期条件的不同表述

$$\frac{M_1 I_1}{M_2 I_2} = \frac{b^2 M_1^4}{M_2^4}$$

和

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{b^2 M_1^4}{M_2^4},$$

其中 I_1,I_2 分别为有理环面 M 的每一个不等价拓扑环的作用量变量,E_1,E_2 分别为系统在周期轨道上运动时每一维上的能量分量. 当 I_1,I_2,E_1,E_2 分别满足上述关系时,轨道才是有理环面 $M(M_1, M_2)$上的周期轨道。因此(6)式为周期轨道必需满足的周期条件.

对于这一系统,Maslov 指数 $\eta_M = 2M_1 + 2M_2$,结合(4)式和(7)式来确定这个系统的周期轨道量子化条件. 根据有理环面拓扑的定义,系统沿有理环面 M 上的周期轨道运动一周,系统在环面 M 的每一个不等价拓扑圆上分别运动了 M_1,M_2 周,故(4)式可写为

$$S_M^{0q} = (m_1 + m_2 + M_1/2 + M_2/2)h, \tag{9}$$

其中,$m = m_1 + m_2$(m_1,m_2 为整数). 令 $n_1 = \frac{m_1}{M_1}$,$n_2 = \frac{m_2}{M_2}$,则分立的作用量为

$$S_M^{0q} = M_1(n_1 + 1/2)h + M_2(n_2 + 1/2)h. \tag{10}$$

考虑到环面 M 上的周期轨道量子化时,环面 M 的每一个不等价拓扑圆也都是量子化的,它们的作用量 I_1,I_2 都是量子化的,(10)式中的 n_1,n_2 应该取整数($n_1, n_2 = 1, 2\cdots$). 其中,$S_1 = M_1(n_1 + 1/2)h$,$S_2 = M_2(n_2 + 1/2)h$ 分别是第一维和第二维上的量子化的作用量,它们近似地满足周期性条件(7)式(因为(10)式给出的周期轨道作用量量子化条件是从半经典近似下的 Berry-Tabor 求迹公式推出的,故而只是近似的满足周期条件):

$$\frac{M_1(n_1 + 1/2)h}{M_2(n_2 + 1/2)h} \approx \frac{b^2 M_1^4}{M_2^4}, \tag{11}$$

(10)式和(11)式给出了物理上存在的量子化的周期轨道. 另一方面,与 Bohr-Sommerfeld 量子化条件不同的是,它给出的是一条周期轨道的作用量量子化条件,而不仅仅是系统在每一维上的作用量量子化条件. 这就使得我们有可能从量子化的周期轨道的作用量出发,直接得到系统半经典的能级,而 Bohr-Sommerfeld 量子化方法或 EBK(Einstein Brillouin Keller)量子化方法则直接得到的是每一维上的能级分量. (10)式和(11)式也为我们找到周期轨道与能级间的对应关系提供了可能.

3　半经典能级的导出

我们从量子化的周期轨道的作用量出发,来推导这一系统的半经典量子化的能级. 对于二维无关联四次振子系统,系统的能量 E 与有理环面 $M(M_1, M_2)$ 上的周期轨道的作用量 S_M^0 满足如下关系[6]

$$E = \left(\frac{S_M^0}{\frac{4}{3}\xi(ab)^{-1/4}(b^2M_1^4 + M_2^4)^{1/4}}\right)^{4/3}, \tag{12}$$

其中 $\xi = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2/(2\pi)$ 是一常数. 将(10)式带入(12)式,得到与有理环面 $M(M_1, M_2)$ 上的量子化的周期轨道相对应的半经典能级 E_N

$$E_N = \left(\frac{M_1(n_1 + 1/2)h + M_2(n_2 + 1/2)h}{\frac{4}{3}\xi(ab)^{-1/4}(b^2M_1^4 + M_2^4)^{1/4}}\right)^{4/3}, \tag{13}$$

利用周期性条件(11)式,令

$$\begin{aligned} M_1(n_1 + 1/2)h &= b^2M_1^4x, \\ M_2(n_2 + 1/2)h &= M_2^4x, \end{aligned} \tag{14}$$

将(14)式带入(13)式,经过简单的推导,给出二维无关联四次振子系统的半经典能级

$$E_N = \pi^2\left[\frac{3\hbar}{\Gamma(1/4)^2}\right]^{4/3}\left[\frac{a}{b}\right]^{1/3}[(n_1 + 1/2)^{4/3} + b^{2/3}(n_2 + 1/2)^{4/3}]. \tag{15}$$

另一方面,解 Schrödinger 方程可以得到二维无关联四次振子系统的量子能级,根据文献[8]给出的一维四次振子量子能级的渐进解,我们很容易得到二维无关联四次振子系统的量子能级的渐进值

$$\begin{aligned} E_N^q = {}& \pi^2\left[\frac{3\hbar}{\Gamma(1/4)^2}\right]^{4/3}\left[\frac{a}{b}\right]^{1/3}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left\{\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)^{4/3}[9\pi(n_1 + 1/2)^2]^{-k} + \right. \\ & \left. b^{2/3}\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^{4/3}\left[9\pi\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-k}\right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

其中,前 4 个 WKB 项的系数为

$$\begin{aligned} &c_0 = 1, & &c_1 = 1, \\ &c_2 = \frac{5}{8} + \frac{11}{6}\left(\frac{\Gamma(1/4)^2}{4\pi}\right)^4, & &c_3 = \frac{11}{12} + \frac{341}{10}\left(\frac{\Gamma(1/4)^2}{4\pi}\right)^4. \end{aligned} \tag{17}$$

很显然,(15)式正是(16)式中的零级($k = 0$)项. 从上面的讨论过程可知,(15)式是半经典近似下的能级公式,而在(16)式中一级以上的项对量子能级的贡献很小. 表 1 分别给出了 15 条半经典能级与量子能级. 在计算时,$\hbar = 1$,量子能级用 Schrödinger 方程的渐进解(16)式.

从表中可以看出,半经典能级与量子能级符合得较好,与以往半经典方法的结果一致,即随着量子数的增大,两者符合得越来越好. 这从(16)式也可以看出,当 n_1, n_2 增大时,一级以上的项的贡献减小,使得半经典能级与量子能级的差别越来越小.

表1　能级比较

级数	E_N	E_N^s	$E_N - E_N^s$
1	2.54191	2.58404	1.63046×10^{-2}
2	3.78243	3.81795	9.30417×10^{-3}
3	5.02294	5.05186	5.72342×10^{-3}
4	5.20433	5.23685	6.20951×10^{-3}
5	6.44485	6.47076	4.00407×10^{-3}
6	6.77005	6.80077	4.51695×10^{-3}
7	7.86676	7.88966	2.90314×10^{-3}
8	8.01057	8.03468	3.00072×10^{-3}
9	8.54703	8.48653	3.47561×10^{-3}
10	9.43248	9.45358	2.23251×10^{-3}
11	9.69755	9.72044	2.35451×10^{-3}
12	10.24992	10.27852	2.78252×10^{-3}
13	10.9982	11.01751	1.75227×10^{-3}
14	11.11946	11.13934	1.78487×10^{-3}
15	11.49043	11.51242	1.91022×10^{-3}

4　讨论

在上面的讨论中,通过 Berry-Tabor 求迹公式的奇点给出了周期轨道的一般量子化条件(4)式,另外,应强调的是需要考虑系统周期轨道的周期条件,这样才能保证所研究的周期轨道是真实的周期轨道. 对于二维无关联四次振子系统,我们给出了它的周期条件(9)式,由此得到了这个系统半经典的能级公式. 另一方面,对于一个给定的有理环面 $M(M_1, M_2)$,由(11)式和(15)式可以近似确定一组与有理环面 M 上的周期轨道相对应的半经典能级,即可以发现半经典能级与有理环面及其周期轨道之间的对应关系. 但是对于混沌系统,由于有理环面的破坏,这种对应关系有待进一步研究.

参考文献(References)

1　Einstein A. Verh. Dtsch. Phys. Ges., 1917, **19**: 82
2　Brillouin L J. Phys. Radium., 1926, **7**: 353
3　Keller J B. Ann. Phys., 1958, **4**: 180—188
4　Gutzwiller M C. J. Math. Phys., 1971, **12**: 343—358
5　Olavo L S F. Physica, 1999, **A271**: 260—302
6　Berry M V, Tabor M. J. Phys., 1977, **A10**: 371—379
7　Ullmo Denis, Grinberg Maurice, Tomsovic Steven. Phys. Rev., 1996, **E54**: 136—152
8　Hioe F T, Montroll E W, Yamawaki M. Perspectives in Statistical Nuclear Physics, North-Holland: Amsterdam, 1981

Trace Formula and Periodic Orbits Quantization for Two-Dimensional Integrable System *

SONG Jian-Jun[2]　　LI Xi-Guo[1,2]

1 (*Research Center of theoretical Nuclear Physics, Teh National Laboratory of Heavy Ion Collision, Lanzhou 730000, China*)

2 (*Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China*)

Abstract The general quantization condition for periodic orbits in a two-dimensional integrable system is presented via the Berry-Tabor trace formula. Using the quantization and a periodicity condition of periodic orbits the semiclassical quantization condition and semiclassical quantized energies of a two dimensional uncoupled quartic oscillator system are given in detail. The semiclassical quantized energies-periodic orbits correspondence is also analysed.

Key words trace formula, periodic orbit, action quantizing, semiclassical energy level

Received 17 October 2000

* Supported by Foundations of Institute of Modern Physics and the Sciences Foundation of the Chinese Education Commission and 100 Talent Programme of The Chinese Academy of Sciences and Major State Basic Research Development Program (G20000774)