

双参数形变谐振子奇偶相干态的高阶压缩特性

汪 仲 清¹⁾

(石油大学应用物理系 东营 257061)

摘要 研究了双参数 qs 形变谐振子奇偶相干态中光场的高阶压缩特性,并用数值计算方法定量研究了形变参数 q 和 s 对这一特性的影响规律.结果表明, qs 形变谐振子奇偶相干态均可能呈现奇次方阶压缩效应却无偶次方阶压缩效应,这与谐振子没有形变时的通常情况是不同的.当 q 和 s 取一定值时,在 qs 形变相干态中谐振子强度 r^2 取值的一定范围内,这种反常特性的范围随着 q 偏离 1 越大 s 取值越小而变大.有关单参数 q 形变奇偶相干态的结论作为特例包含在本文的一般结论之中.

关键词 光场 双参数形变 奇偶相干态 高阶压缩特性

1 引言

近年来,量子群及其代数结构的研究受到学术界的重视.众所周知,相干态是物理学研究的一个重要基本对象,将相干态和量子群联系起来考虑是一个非常有意义的问题.1989年, Biedenharn^[1] 将具有李群结构的相干态推广到具有量子群结构的 q 形变相干态,此后 q 相干态就受到人们广泛关注^[2-7].如同相干态在物理学中的地位,量子代数的参数形变相干态在物理学的许多领域及数学物理方面存在着广泛的应用前景.

我们知道,奇偶相干态是光子湮没算符平方的本征态,它们共同构成一个完备的 Hilbert 空间.从场的性质方面来看,奇偶相干态具有一种我们熟知的非经典特性,偶相干态具有压缩效应而无反聚束效应;奇相干态具有反聚束效应而无压缩效应.王发伯、匡乐满^[8] 构造了单参数 q 形变奇偶相干态,并且研究了它们的一些量子统计性质.需要指出的是,现在人们研究的兴趣大多集中在量子代数的单参数(通常记为 q)量子变形.实际上,从物理应用的角度来看,多个形变参数的量子代数及其变形振子表示有时可能更有一些.虽然在数学上可以证明两个或多个参数的量子代数能够经过某些变换回到单参数情形,但是正如 Wess 和 Zumine^[9] 所指出的,多个变形参数在本质上是相互独立的.

2001-04-16 收稿

1) E-mail: zqwang@mail.hdpu.edu.cn

鉴于物理应用的考虑, 多参数形变量子群的研究^[10-13]也受到了重视, Chakrabarti 和 Jagannathan^[11]等人提出了双参数形变谐振子, 并由此得到了双参数量子代数 $SU_q(2)$ 的有限维表示, 还构造了双参数形变谐振子湮没算符的本征态, 即 qs 相干态. 周焕强^[12]等人构造了双参数形变谐振子湮没算符二次幂的本征态, 即双参数 qs 形变奇偶相干态, 并且证明了这些相干态构成一个完备的表象. 本文在文献[12]的基础上旨在将王发伯等人的单参数形变奇偶相干态的量子统计性质研究推广到双参数形变的高阶情况, 利用数值计算方法定量研究形变参数 q 和 s 对这种情形的影响. 而有关单参数 q 形变奇偶相干态的统计特性包含在本文的一般结论之中.

双参数 qs 形变谐振子奇偶相干态

双参数形变玻色产生算符 a_q^\dagger 和湮没算符 a_q 以及数算符 N_q 满足如下对易关系式^[12]:

$$a_q a_q^\dagger - s^{-1} q a_q^\dagger a_q = (sq)^{-N_q}, \quad (1)$$

$$[N_q, a_q^\dagger] = a_q^\dagger, \quad [N_q, a_q] = -a_q, \quad (2)$$

其中 q 和 s 为两个变形参数. N_q , a_q 和 a_q^\dagger 作用于双参数 qs -Fock 空间 $\{|n\rangle_q, n=0, 1, 2, \dots\}$

$$N_q |n\rangle_q = n |n\rangle_q, \quad (3)$$

$$a_q |n\rangle_q = \sqrt{[n]_q} |n-1\rangle_q, \quad (4)$$

$$a_q^\dagger |n\rangle_q = \sqrt{[n+1]_q} |n+1\rangle_q. \quad (5)$$

符号 $[n]_q$ 定义为

$$[n]_q = \frac{(s^{-1}q)^n - (sq)^{-n}}{s^{-1}q - s^{-1}q^{-1}} = s^{1-n} [n]_q. \quad (6)$$

显然, $[n]_q$ 在替换 $q \rightarrow q^{-1}$ 下保持不变, 且当 $s \rightarrow 1$ 时, $[n]_q \rightarrow [n]_q = (q^n - q^{-n}) / (q - q^{-1})$. $|n\rangle_q$ 定义为

$$|n\rangle_q = \frac{(a_q^\dagger)^n}{\sqrt{[n]_q!}} |0\rangle_q, \quad (7)$$

其中 qs 阶乘理解为 $[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q$, 并规定 $[0]_q! = 1$, 则 $\langle m | n \rangle_q = \delta_{mn}$. qs -Fock 空间的完备性由如下的单位分解表征:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle_q \langle n|. \quad (8)$$

在双参数 qs -Fock 空间内可将 Chakrabarti 和 Jagannathan^[11]引入的双参数相干态 $|\alpha\rangle_q$

$$a_q |\alpha\rangle_q = \alpha |\alpha\rangle_q, \quad (9)$$

表示成如下形式

$$|\alpha\rangle_q = \exp_q \left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{[n]_q!}} |n\rangle_q, \quad (10)$$

其中 q_s 指数函数 $e_q(x)$ 定义为

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} \quad (11)$$

根据文献[12], q_s 形变奇相干态 $|\alpha\rangle_q^o$ 和偶相干态 $|\alpha\rangle_q^e$ 定义为

$$|\alpha\rangle_q^o = N_q^o(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]_q!}} |2n+1\rangle_q, \quad (12)$$

$$|\alpha\rangle_q^e = N_q^e(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]_q!}} |2n\rangle_q, \quad (13)$$

它们是 q_s 湮没算符二次幂 a_q^2 的本征态(二重简并态), 本征值为 α^2 , $N_q^o(\alpha)$ 和 $N_q^e(\alpha)$ 是归一化常数, 可由归一化条件求得

$$N_q^o(\alpha) = (\sinh_q(\alpha\bar{\alpha}))^{-1/2}, \quad (14)$$

$$N_q^e(\alpha) = (\cosh_q(\alpha\bar{\alpha}))^{-1/2}, \quad (15)$$

$\bar{\alpha}$ 表示 α 的复数共轭, 其中 q_s 双曲函数

$$\sinh_q(x) = \frac{1}{2} [e_q(x) - e_q(-x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_q!}, \quad (16)$$

$$\cosh_q(x) = \frac{1}{2} [e_q(x) + e_q(-x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{[2n]_q!}. \quad (17)$$

则奇偶 q_s 相干态还可以写成

$$|\alpha\rangle_q^o = N_q^o(\alpha) \sinh_q(\alpha a_q^+) |0\rangle_q, \quad (18)$$

$$|\alpha\rangle_q^e = N_q^e(\alpha) \cosh_q(\alpha a_q^+) |0\rangle_q. \quad (19)$$

由(12)式和(13)式可以得到

$${}_q^o\langle\alpha'|\alpha\rangle_q^o = N_q^o(\alpha') N_q^o(\alpha) \sinh_q(\alpha\bar{\alpha}'), \quad (20)$$

$${}_q^e\langle\alpha'|\alpha\rangle_q^e = N_q^e(\alpha') N_q^e(\alpha) \cosh_q(\alpha\bar{\alpha}'), \quad (21)$$

$${}_q^o\langle\alpha'|\alpha\rangle_q^e = 0, \quad (22)$$

这表明奇偶 q_s 形变相干态是非正交的, 而奇 q_s 相干态和偶 q_s 相干态相互正交.

由(4)式和(12), (13)式容易得到

$$a_q |\alpha\rangle_q^o = \alpha (\coth_q(\alpha\bar{\alpha}))^{1/2} |\alpha\rangle_q^e, \quad (23)$$

$$a_q |\alpha\rangle_q^e = \alpha (\tanh_q(\alpha\bar{\alpha}))^{1/2} |\alpha\rangle_q^o, \quad (24)$$

其中

$$\tanh_q(x) = \frac{e_q(x) - e_q(-x)}{e_q(x) + e_q(-x)}, \quad (25)$$

$$\coth_q(x) = \frac{e_q(x) + e_q(-x)}{e_q(x) - e_q(-x)}. \quad (26)$$

因此奇偶 q_s 相干态可以通过 q_s 湮没算符的作用来变换, 很容易进一步推知

$$a_q^M |\alpha\rangle_q^o = \begin{cases} \alpha^M |\alpha\rangle_q^o, & (M = 2n, n = 1, 2, 3, \dots), \\ \alpha^M (\coth_q(\alpha\bar{\alpha}))^{1/2} |\alpha\rangle_q^e, & (M = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots), \end{cases} \quad (27)$$

$$a_q^M |\alpha\rangle_q^e = \begin{cases} \alpha^M |\alpha\rangle_q^e, & (M = 2n, n = 1, 2, 3, \dots), \\ \alpha^M (\tanh_q(\alpha\bar{\alpha}))^{1/2} |\alpha\rangle_q^o, & (M = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (28)$$

3 双参数 qs 形变谐振子奇偶相干态的高阶压缩特性

类似于通常光场压缩的定义, 引入双参数光场压缩的概念, 用 qs 玻色产生算符 a_q^\dagger 和湮没算符 a_q 定义两个厄密算符

$$w_1 = (a_q^{+M} + a_q^M)/2, \quad w_2 = i(a_q^{+M} - a_q^M)/2, \quad (29)$$

它们分别表示 qs 形变光场复振幅 M 次幂的实部和虚部, 并且满足如下的对易关系和不确定关系

$$[w_1, w_2] = i[a_q^M, a_q^{+M}]/2, \quad (30)$$

$$\langle \Delta w_1^2 \rangle \cdot \langle \Delta w_2^2 \rangle \geq \frac{1}{16} |\langle [a_q^M, a_q^{+M}] \rangle|^2. \quad (31)$$

如果存在不等式

$$\langle \Delta w_i^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle [a_q^M, a_q^{+M}] \rangle < 0, \quad (i = 1, 2), \quad (32)$$

则称 qs 形变光场存在振幅 M 次方压缩效应.

令 $\alpha = re^{i\theta}$, 利用(27), (28)式, 通过计算可以得到

$$\begin{aligned} & {}^o\langle \alpha | \Delta w_{1,2}^2 | \alpha \rangle_q^o - \frac{1}{4} {}^o\langle \alpha | [a_q^M, a_q^{+M}] | \alpha \rangle_q^o = \\ & \begin{cases} 0, & (M = 2n, n = 1, 2, 3, \dots), \\ \frac{1}{2} r^{2M} (\pm \cos 2M\theta + \coth_q r^2), & (M = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots), \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & {}^e\langle \alpha | \Delta w_{1,2}^2 | \alpha \rangle_q^e - \frac{1}{4} {}^e\langle \alpha | [a_q^M, a_q^{+M}] | \alpha \rangle_q^e = \\ & \begin{cases} 0, & (M = 2n, n = 1, 2, 3, \dots), \\ \frac{1}{2} r^{2M} (\pm \cos 2M\theta + \tanh_q r^2), & (M = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots). \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

由(33)和(34)式可以看出, 双参数 qs 形变谐振子奇偶相干态不可能存在偶(M 为偶数)次方阶压缩效应. 当 $q = s = 1$ 时, 有 $\coth r^2 > 1$ 和 $\tanh r^2 < 1$, 所以通常的奇相干态不存在压缩效应; 通常的偶相干态也不存在光场振幅的偶(M 为偶数)次方阶压缩效应, 在 $\pm \cos 2M\theta + \tanh r^2 < 0$ 时, 将会出现光场振幅的奇(M 为奇数)次方阶压缩效应. 而双参数 qs 形变谐振子奇偶相干态的高阶压缩特性要由 $\coth_q r^2 < 1$ (或 $\tanh_q r^2 < 1$) 来确定. 图 1—4 是当 q 和 s 取不同值时, 函数 $\tanh_q r^2$ 和 $\coth_q r^2$ 随着 r^2 (对应 qs 形变相干态中谐振子的强度) 变化的数值计算结果. 由图可以看出, 当 q 和 s 取不同值时, 函数 $\tanh_q r^2$ 和 $\coth_q r^2$ 随着 r^2 变化可以大于 1, 也可以小于 1, 并且这种变化交替地出现在多个区间内, 则双参数形变谐振子奇偶相干态均有可能呈现奇次方阶压缩效应. 特别是, 当 $\theta = \theta_m = \frac{m}{M}\pi$

(或 $\theta = \theta'_m = \frac{2m+1}{2M}\pi$) ($m = 0, 1, 2, \dots$) 时, $\cos 2M\theta_m = \pm 1$, 而 $\coth_q r^2 < 1$ (或 $\tanh_q r^2 < 1$), qs 形变谐振子奇偶相干态就可在 r^2 取值的某些范围内呈现光场振幅的奇次方阶压缩效应.

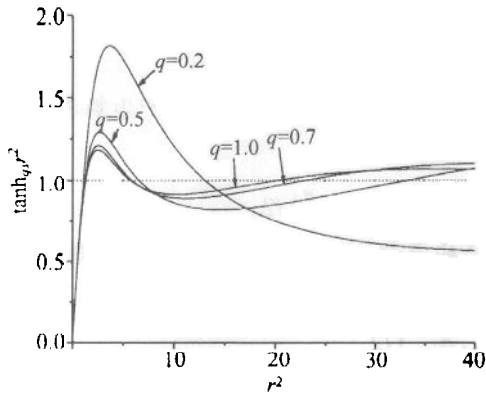


图 1 $\tanh_q r^2$ 随 r^2 的变化 ($s = 0.4$)

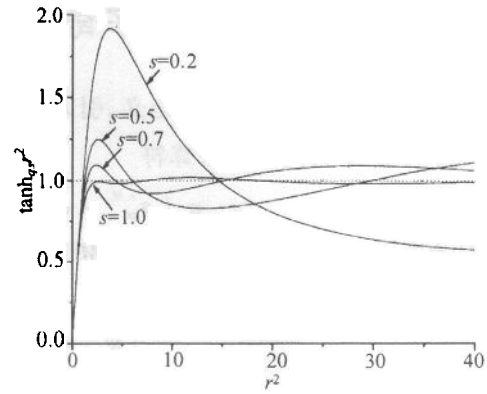


图 2 $\tanh_q r^2$ 随 r^2 的变化 ($q = 0.4$)

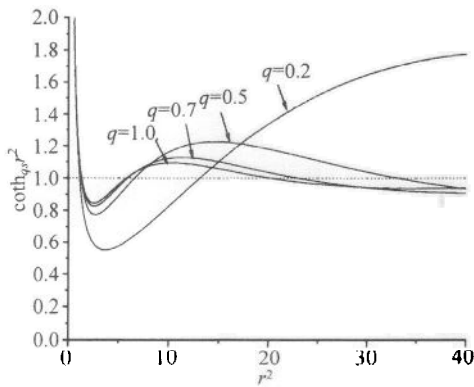


图 3 $\coth_q r^2$ 随 r^2 的变化 ($s = 0.4$)

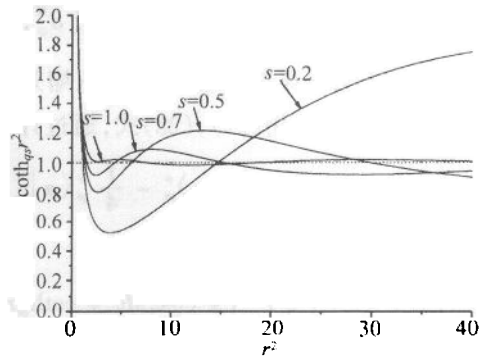


图 4 $\coth_q r^2$ 随 r^2 的变化 ($q = 0.4$)

由图 1 和图 2 可以看出, 当参数 q 和 s 取一定值时, 在 r^2 取值的一定范围内, 函数 $\tanh_q r^2 > 1$, 并且这个范围随 q 偏离 1 越大和 s 取值越小而变宽. 由(34)式可知 qs 形变谐振子偶相干态在这个范围内不会呈现奇次方阶压缩效应, 这与通常的偶相干态是不同的. 图 3 和图 4 表明, 参数 q 和 s 取一定值时, 在 r^2 取值的一定范围内, 函数 $\coth_q r^2 < 1$, 而且这个范围也是随 q 偏离 1 越大和 s 取值越小而变宽, 由(33)式可知 qs 形变谐振子奇相干态在这个范围内呈现奇次方阶压缩效应, 这也与通常的奇相干态是不同的. 这些反常特性的区域均随 q 偏离 1 越大, s 取值越小而变宽. 此外, 若将图 1 和图 3、图 2 和图 4 分别进行比较可以发现, 在参数 q 和 s 分别取两个固定值的情况下和在 r^2 取值的某些范围内, 若 qs 形变谐振子奇相干态不呈现奇次方阶压缩效应, 则在此情况下和此范围内, qs 形变谐振子偶相干态将会呈现奇次方阶压缩效应.

4 结论

在双参数 qs 形变谐振子奇偶相干态中,研究了 qs 形变光场振幅的高阶 (M 次方) 压缩特性,并用数值计算方法定量研究了形变参数 q 和 s 对这一特性的影响规律. 我们发现, qs 形变谐振子奇偶相干态均可能存在奇次方阶压缩特性,不可能出现偶次方阶压缩效应,这与通常谐振子奇偶相干态的情况是不同的. 当参数 q 和 s 取一定值时,在 qs 形变相干态中谐振子强度 r^2 取值的一定范围内,这种反常特性的范围随 q 偏离 1 越大 s 取值越小而变大. 本文的结论具有普遍性,而单参数 q 形变奇偶相干态作为特殊情形包含在这普遍结论之中.

由本文的讨论可见,双参数形变谐振子奇偶相干态不仅包含了通常相干态 ($q = s = 1$) 的情况,也包含了单参数形变相干态 ($s = 1, q \neq 1$) 的情况^[7]. 这表明双参数形变谐振子构成的体系比通常的或单参数形变体系具有更广泛的物理内涵. 由于是两个参数进行调控,双参数调制比单参数更容易. 如果这种体系在实验上实现,我们将更容易地通过调节参数 q 和 s 来控制场的一些量子统计性质. 因此这种体系具有潜在的重要应用前景,值得人们深入研究.

参考文献 (References)

- 1 Biedenharn L C. J. Phys., 1989, **A22**:L873
- 2 SUN C P, FU H C. J. Phys., 1989, **A22**:L983
- 3 Chaichur M, Ellinas D, Kullish P. Phys. Rev. Lett., 1990, **65**:980
- 4 Quesne C. Phys. Lett., 1991, **A153**:303
- 5 Kuang L M, Wang F B. Phys. Lett., 1993, **A173**:221
- 6 ZHU Cong-Xu. Acta Optica Sinica, 1999, **19**:441(in Chinese)
(朱从旭. 光学学报, 1999, **19**:441)
- 7 WANG Zhong-Qing. Acta Physica Sinica, 2001, **50**:690(in Chinese)
(汪仲清. 物理学报, 2001, **50**:690)
- 8 Schrirrmacher A, Weiss J, Zumine B. Z. Phys., 1991, **C49**:317
- 9 WANG F B, KUANG L M. J. Phys. (A), 1993, **26**:293
- 10 Sudbery A. J. Phys. (A), 1990, **23**:L697
- 11 Chakrabarti R, Jagannathan R. J. Phys., 1991, **A24**:L711
- 12 ZHOU Huan-Qiang, HE Jing-Song, ZHANG Xin-Ming. High Energy Physics and Nuclear Physics, 1995, **19**:251(in Chinese)
(周焕强, 贺劲松, 张新明. 高能物理与核物理, 1995, **19**:251)
- 13 CHEN Chang-Yuan, LIU You-Wen. High Energy Physics and Nuclear Physics, 2001, **25**:193(in Chinese)
(陈昌远, 刘友文. 高能物理与核物理, 2001, **25**:193)

Higher Power Squeezing Properties for Odd and Even Two-Parameter Deformed Coherent States

WANG Zhong-Qing¹⁾

(Department of Applied-Physics, University of Petroleum, Dongying 257061, China)

Abstract The higher-order powers of squeezing properties of light field for odd and even two-parameter deformed-coherent states have been studied, and the numerical method is used to investigate the influence of the two parameters (q and s) on the properties. The results show that the odd and the even qs -deformed coherent states can exhibit odd number powers of squeezing but no even number powers of squeezing effects. These properties are different from those of the states of the conventional no-deformed light field. These effects can be shown in a number of intervals alternately when r^2 , which reflects the intensity of the light field in two-parameter deformed coherent state, is changed. When the two parameters q and s are taken certain values and r^2 is taken value in a certain interval, the larger of parameter q which deviated from 1 and the smaller of parameter s , the intervals of the unusual properties become larger. The relevant results of the even and odd q -coherent states are contained in more general conclusion of this paper as special case.

Key words light field, two-parameter deformed coherent state, higher power squeezing property

Received 16 April 2001

1)E-mail: zqwang@mail.hdpu.edu.cn