

q 变形三参数公式对偶偶核基带的描述*

方向正^{2,3} 阮图南^{1,3}

1 (中国高等科学技术中心 北京 100080)

2 (安徽大学物理系 合肥 230039)¹⁾

3 (中国科学技术大学近代物理系 合肥 230027)

摘要 利用 q 变形三参数公式, 计算了铜系和稀土偶偶核基带转动谱, 详细分析了拟合参数值呈现出的规律性. 结果表明, q 变形转动惯量转子模型能够较精确地描述偶偶核基带转动谱.

关键词 q 变形转动惯量 量子代数 软度系数 粒子-空穴

1 引言

文献[1,2]建议用量子群 $SU_q(2)$ 理论的 q 转子模型描述原子核转动谱. 由于该模型所预期的铜系和稀土偶偶形变核转动谱与实验值有较大偏离^[3], Barbier 等人^[4] 提出双参数量子群 $U_{qp}(u_2)$ 理论模型. 文献[5]的工作显示, $U_{qp}(u_2)$ 模型较 q 转子模型有了明显改进, 但是与 $a-b-c$ 三参数能谱公式相比, 仍有较大误差^[6]. 最近, 文献[7]提出 q 变形转动惯量转子模型, 该模型认为固定形变、Stretching 效应和多体统计效应可能是形成原子核转动的 3 个主要因素, 这 3 个自由度集中体现在转动惯量的表达式中:

$$\mathcal{I}(I) = \mathcal{I}_0 \{1 + B[I]_q [I + 1]_q\}, \quad (1)$$

在转动的框架下, 原子核的转动谱公式可以近似表示为

$$E(I) = \frac{I(I+1)}{2\mathcal{I}_0 \{1 + B[I]_q [I + 1]_q\}} \hbar^2, \quad (2)$$

其计算结果表明, (2) 式能够较精确地描述超形变核转动带, 相应的拟合参数所呈现的规律性可以得到合理地解释. 本文基于转动谱规律的相似性, 尝试用 (2) 式来描述偶偶核基带转动谱, 以检验该公式的适用性.

2 计算公式

在量子代数理论中, q 数 $[x]_q$ 有两种不同形式的等价表示:

2000-01-19 收稿, 2000-04-25 收修改稿

* 国家自然科学基金(19677102, 19775044 和 19991480), 高等学校博士学科点专项科研基金(97035807), 北京正负电子对撞机国家实验室和兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心资助

1) 通讯地址

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} = \frac{\sin(\tau x)}{\sin(\tau)} \quad (q = e^{i\tau}, \tau \text{ 为实数}), \quad (3)$$

$$[x]_Q = \frac{Q^x - 1}{Q - 1} = \frac{e^{-\tau x} - 1}{e^{-\tau} - 1} \quad (Q = e^{-\tau}, \tau \text{ 为大于零的实数}), \quad (4)$$

相应的(1)式给出了两种转动惯量:

$$\mathcal{J}_q(I) = \mathcal{J}_0 \left[1 + B \frac{\sin(\tau I) \sin(\tau I + \tau)}{\sin \tau \sin \tau} \right], \quad (5)$$

$$\mathcal{J}_Q(I) = \mathcal{J}_0 \left[1 + B \frac{(e^{-\tau I} - 1)(e^{-\tau(I+1)} - 1)}{(e^{-\tau} - 1)^2} \right]. \quad (6)$$

值得提出的是,上两式之间并不存在某种直接的变换.

实验资料显示,正常形变带(ND)和超形变带(SD)都具有转动谱的典型特征,但 ND 和 SD 带分别存在于势能面上第一和第二稳定谷内^[8],微观研究^[9-11]进一步指出,ND 核和 SD 核具有不同的转动特征. 以 q 变形转动惯量转子模型观点,转动特征可以用转动惯量表达式反映,由于文献[7]用(5)式较成功地描述了 SD 带,因此我们认为(6)式给出的就是形变核转动惯量. 综合(2)式和(6)式,正常形变核转动谱为

$$E(I) = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}_0 \left[1 + B \frac{(e^{-\tau I} - 1)(e^{-\tau(I+1)} - 1)}{(e^{-\tau} - 1)^2} \right]}. \quad (7)$$

3 能谱拟合

文献[5]系统地给出了铜系和稀土偶偶核转动谱的实验值,利用(7)式,通过非线性拟合,寻找最小方均根差 σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i [E_{\text{exp}}(i) - E_{\text{cal}}(i)]^2} \quad (8)$$

即可得到拟合参数和转动谱的计算值,式中 N 是拟合能谱的条数. 表 1 和 2 中列出了(7)式的拟合参数以及最小方均根差,其中拟合最好的是²⁴⁰Pu: $\sigma = 0.085\text{keV}$,实验值与计算结果几乎完全一致,其次是¹⁷²Yb: $\sigma = 0.112\text{keV}$;最差的是²⁴⁸Cm: $\sigma = 1.816\text{keV}$,其次是²³⁶U: $\sigma = 1.270\text{keV}$. 其余核素转动谱的拟合方均根差都小于 1keV ,基本上在实验误差范围内.

为了便于比较,采用

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^{N_1} \sigma_i \quad (9)$$

求得不同核区或所有被拟合核素的方均根差,其中 N_1 为拟合核素的总个数, σ_i 为(8)式给出的每个核素的方均根差. 在表 3 中列出了 $a-b$, $a-b-c$ 公式以及 $U_{qp}(u_2)$ 模型在拟合实验结果时得到的铜系和稀土偶偶核总的方均根差. $U_{qp}(u_2)$ 模型和 $SU_q(2)$ 转子模型本质是等价的,虽然改进了 $SU_q(2)$ 转子模型的计算结果,但系统误差比两参数公式 $a-b$ 公式还要大. 表 3 的结果表明,三参数公式(7)优于 $a-b$ 公式,也略优于 $a-b-c$ 公式. 在附录中列出了铜系和稀土系偶偶核转动谱的实验值与计算结果. 其中误差最大的是²⁴⁸Cm 核 $I=26$ 的能级, $E_{\text{cal}} - E_{\text{exp}} = 3.140\text{keV}$,与 $a-b-c$ 公式的计算误差 $E_{\text{cal}} - E_{\text{exp}} = 3.200\text{keV}$

相当. 文献[6]曾系统地分析了多参数公式对偶偶核基带能谱的拟合精度, 认为 $a-b-c$ 公式是精度最高的三参数公式, 我们的计算结果并不支持这一结论.

表1 铜系区偶偶核转动谱的拟合参数、方均根差 σ 、能谱条数 N 和软度系数 S

	$\mathcal{J}_0/(\hbar^2/\text{MeV})$	$B \times 10^3$	τ	σ/keV	N	$S \times 10^3$
^{248}Cm	68.557	0.498	0.0115	1.816	14	0.500
^{244}Pu	65.394	0.573	0.0165	0.479	10	0.578
^{242}Pu	67.510	0.500	0.0150	0.879	12	0.504
^{240}Pu	69.735	0.613	0.0242	0.085	7	0.620
^{238}Pu	67.898	0.548	0.0246	0.249	9	0.555
^{236}Pu	67.806	0.501	0.0059	0.437	8	0.502
^{238}U	66.863	0.635	0.0152	0.548	14	0.640
^{236}U	65.702	0.752	0.0203	1.270	14	0.760
^{234}U	68.298	1.057	0.0318	0.539	14	1.074
^{232}U	62.885	1.003	0.0268	0.302	10	1.017
^{230}U	57.564	1.515	0.0400	0.167	8	1.545
^{232}Th	60.226	1.278	0.0325	0.367	14	1.299
^{230}Th	56.378	1.332	0.0326	0.619	11	1.354
^{228}Th	51.813	2.160	0.0408	0.508	7	2.204

表2 稀土区偶偶核转动谱的拟合参数、方均根差 σ 、能谱条数 N 和软度系数 S

	$\mathcal{J}_0/(\hbar^2/\text{MeV})$	$B \times 10^3$	τ	σ	N	$S \times 10^3$
^{178}Hf	32.150	0.750	-0.0079	0.354	8	0.747
^{176}Hf	33.802	1.090	0.0210	0.171	8	1.101
^{174}Hf	32.810	1.336	0.0144	0.423	8	1.346
^{172}Hf	31.486	1.690	0.0247	0.757	8	1.711
^{170}Hf	29.450	3.300	0.0454	0.475	8	3.375
^{176}Yb	36.448	0.458	-0.0079	0.116	8	0.456
^{174}Yb	39.029	0.613	0.0231	0.312	10	0.620
^{172}Yb	37.939	0.703	0.0310	0.112	8	0.741
^{170}Yb	35.714	0.591	0.0083	0.692	7	0.592
^{168}Yb	34.023	1.440	0.0175	0.425	8	1.453
^{166}Er	36.966	1.030	0.0100	0.308	8	1.035
^{164}Er	32.701	1.210	0.0230	0.646	7	1.224
^{164}Dy	40.640	0.815	0.0220	0.193	7	0.824
^{162}Dy	37.070	0.913	0.0259	0.398	9	0.925
^{156}Gd	33.715	1.844	0.0314	0.775	7	1.914

表3 三参数能谱公式对实验拟合的均方根差 $\bar{\sigma}$

(单位: keV)

Formula	$\bar{\sigma}(A)$	$\bar{\sigma}(R)$	$\bar{\sigma}(T)$
$a-b$	0.769	1.326	1.143
$a-b-c$	0.544	0.583	0.509
$U_{qp}(u_2)$	2.490	1.657	2.059
Ours	0.590	0.410	0.497

A代表铜系区, R 稀土区, T 为两区总和.

4 参数分析

在具体的计算中发现,对计算结果最敏感的参数是 \mathcal{J}_0 的数值,其余依次是: B 的正负号, B 的数值, τ 的正负号和数值. 从而显示了转动特征(即 $I(I+1)$)的主要因素是原子核的固定形变,能谱规律与刚体转动的偏差是由于转动惯量随转动而变化(B)以及多体统计效应(τ)的结果. 下面对拟合参数值进行具体分析.

1) \mathcal{J}_0 : 原子核基态($I=0$)转动惯量,反映了原子核固定形变的大小. 从表1和2中可以看出, \mathcal{J}_0 的数值与价核子数有关. 图1中所显示的是 $^{176-168}\text{Yb}$ 和 $^{178-170}\text{Hf}$ 的基态转动惯量随中子数的变化情况. $^{176-168}\text{Yb}$ 和 $^{178-170}\text{Hf}$ 的价中子数分别是 106, 104, 102, 100 和 98. 按照壳模型观点,相应的价中子数分别为 24, 22, 20, 18 和 16, 价中子数 22 是 82 和 126 壳的半满壳, 如果以价空穴数表示超过半满壳的价中子数, 则图1中表明的依次是 $\mathcal{J}_0(16)$, $\mathcal{J}_0(18)$, $\mathcal{J}_0(20)$, $\mathcal{J}_0(22)$ 和 $\mathcal{J}_0(18)$, 并且半满壳核的 \mathcal{J}_0 值最大. 另一方面, Yb 价质子空穴数是 12, 比 Hf 多两个价质子空穴, 正是由于两个价质子空穴的贡献, Yb 的 \mathcal{J}_0 依次比 Hf 的 \mathcal{J}_0 大. 同理, 图3中 $^{164-166}\text{Er}$ 的 \mathcal{J}_0 依次比 $^{164-162}\text{Dy}$ 的 \mathcal{J}_0 小, 也是两个价质子空穴的贡献. 这可以理解为原子核固定形变(\mathcal{J}_0)随着价核子(或空穴)数而增大. 在铜系区, 同样有类似的规律(如图4所示). 但图2中 ^{234}U 核是个例外, ^{236}Pu 和 ^{238}Pu 的 \mathcal{J}_0 的差值太小, 已不足以体现两个价中子的贡献, 这可能是铜系区的中子壳效应不如稀土区显著所致.

2) B : 反映原子核转动惯量随角动量的变化快慢程度, 也是原子核软度的一个主要标志. 拟合的结果显示, 参数 B 均大于零, 即转动惯量随转动频率而增大, 这正体现了 Mottelson-Valatin 效应^[12].

3) τ : q 变形参数, 体现多体统计效应. 除 ^{178}Hf 和 ^{176}Yb 外, τ 的取值在 0.0100—0.008 范围, 均大于零. 在 q 变形转动惯量转子模型中, 已经直接给出了转动惯量(6)式, 由软度系数定义:

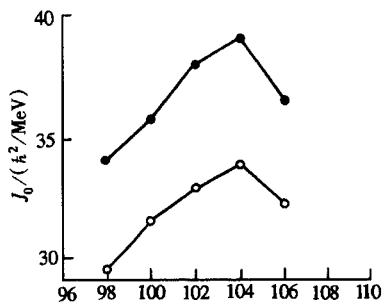


图1 $^{176-168}\text{Yb}$ 和 $^{178-170}\text{Hf}$

的基态转动惯量随中子数的变化

其中横坐标是中子数, —●—Yb, —○—Hf

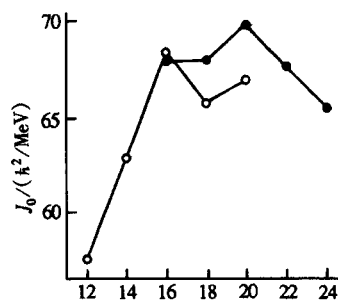


图2 $^{244-236}\text{Pu}$ 和 $^{238-230}\text{U}$

的基态转动惯量随价中子数的变化

横坐标是价中子数, —●—Pu, —○—U

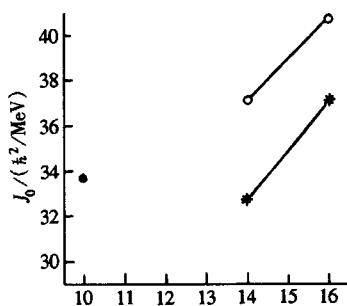


图 3 $^{164-166}\text{Er}$, $^{164-162}\text{Dy}$ 和 ^{156}Gd 的基态转动惯量随中子数的变化
—●—Gd, —○—Dy, —*—Er.

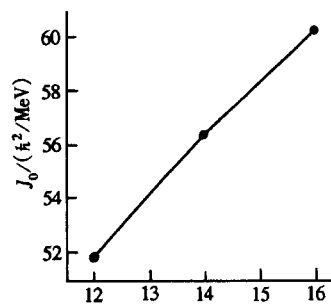


图 4 $^{228-232}\text{Th}$ 的基态转动惯量随价中子数的变化
—●—Th.

$$S = \frac{1}{\mathcal{J}(I)} \left. \frac{d\mathcal{J}(I)}{dI} \right|_{I=0} = \frac{\tau B}{1 - e^{-\tau}} \quad (10)$$

大于零而小于 1 的 τ , 增大了原子核的软度(见表 1 和表 2 中的最后一列数据), 这是多体相互作用的效果. 对于 ^{178}Hf 和 ^{176}Yb , 如果按 τ 大于零的条件计算, 误差分别为 1.593 和 1.685, 远大于小于零的计算结果. 考虑到多体统计效应, 粒子数应该满足 $[N]_q < N$, 其中 $[N]_q$ 相当于等效粒子数, 若 $\tau < 0$, 则难以解释 $[N]_q > N$ 的结果. 如果将 N 理解为空穴数, 可得 $[20]_q < 24$, 与多体统计效应的结论并不矛盾, 从而定性地解释了 ^{178}Hf 和 ^{176}Yb 核的 τ 小于零的合理性.

5 结束语

本文用 q 变形转动惯量转子模型的另一种能谱公式, 拟合了 29 个镧系和稀土偶偶形变核的基带转动谱, 并分析了参数取值的合理性. 结果表明, 作为三参数公式, (7) 式能较精确地显示形变偶偶核转动谱规律, 参数的物理意义明确. 参数的取值明显体现了原子核的壳结构, 支持了微观理论中的粒子-空穴理论, 因此, (6) 式作为形变核的转动惯量具有一定的合理性.

参考文献 (References)

- 1 Raychev P P, Roussev R P, Smimov Yu F. J. Phys., 1990, **G16**:L137
- 2 Iwao S. Prog. Theor. Phys., 1990, **83**:363
- 3 MENG Jie, WU Chong-Shi, ZENG Jin-Yan. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1992, **16**:90(in Chinese)
(孟杰, 吴崇试, 曾谨言. 高能物理与核物理, 1992, **16**:90)
- 4 Barbier R, Meyer J, Kibler. J. J. Phys., 1994, **G20**:L13
- 5 ZHANG Xin-Ming, ZHOU Huan-Qiang. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1996, **20**:165(in Chinese)
(张新明, 周焕强. 高能物理与核物理, 1996, **20**:165)
- 6 PAN Feng, LUO Yan-An, YU Shen-Qi. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1998, **22**:61(in Chinese)
(潘峰, 罗延安, 喻身启. 高能物理与核物理, 1998, **22**:61)

- 7 FANG Xiang-Zheng, RUAN Tu-Nan. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**:269 (in Chinese)
(方向正, 阮图南. 高能物理与核物理 2000, **24**:269)
- 8 ZENG Jin-Yan. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1996, **20**:165(in Chinese)
(曾谨言. 高能物理与核物理, 1996, **20**:165)
- 9 Bonche S et al. Nucl. Phys., 1989, **A500**:308
- 10 Hara K, Sun Y, Nucl. Phys., 1991, **A529**:445
- 11 Satula W, Wyss R. Phys. Rev., 1994, **C50**:2888
- 12 Mottelson B R, Valatin J, Phys. Rev. Lett., 1960, **G5**:511

附录 1 铜系区偶偶核基态转动带能级的实验值和计算值的比较 (单位: keV)

I	^{248}Cm		^{244}Pu		^{242}Pu		^{240}Pu	
	Exp	Cal	Exp	Cal	Exp	Cal	Exp	Cal
2	43.40	43.63	46.10	45.72	44.54	44.31	42.83	42.84
4	144.20	144.48	152.30	151.29	147.30	146.73	141.69	141.70
6	299.50	300.41	314.70	314.23	306.40	305.15	294.32	294.28
8	566.90	568.37	531.10	531.14	518.10	516.60	497.50	497.50
10	763.00	764.65	797.60	797.98	778.70	777.50	747.80	747.86
12	1064.00	1065.10	1110.10	1110.41	1084.00	1083.95	1041.80	1041.75
14	1405.40	1405.43	1463.70	1464.01	1431.30	1431.93	1375.60	1375.61
16	1782.80	1781.24	1854.70	1854.51	1816.30	1817.43		
18	2190.70	2188.30	2278.50	2277.27	2235.60	2236.61		
20	2624.60	2622.65	2730.00	2730.38	2686.20	2285.91		
22	3080.60	3080.61			3163.00	3262.03		
24	3556.00	3558.60			3662.00	3662.04		
26	4051.00	4054.14						
28	4567.30	4564.34						

I	^{238}Pu		^{236}Pu		^{238}U		^{236}U	
	Exp	Cal	Exp	Cal	Exp	Cal	Exp	Cal
2	44.08	44.04	44.63	44.11	44.91	44.70	45.24	45.46
4	145.98	145.81	145.00	146.05	148.41	147.78	149.48	150.10
6	303.40	303.18	303.50	303.52	307.21	306.55	309.79	310.84
8	513.40	513.31	513.40	513.21	517.80	517.30	522.25	523.53
10	772.80	772.95	771.20	770.96	775.70	775.61	782.80	783.48
12	1078.50	1078.74	1072.00	1072.02	1076.50	1076.79	1086.20	1085.80
14	1427.20	1427.35	1411.30	1422.37	1415.30	1416.05	1425.00	1425.73
16	1816.20	1815.63	1783.70	1783.72	1788.20	1788.78	1800.00	1798.85
18	2240.50	2240.71			2190.70	2190.67	2203.00	2201.16
20					2618.70	2617.81	2630.00	2629.19
22					3067.20	3066.73	3080.00	3079.96
24					3534.50	3534.40	3549.00	3550.97
26					4017.30	4018.25	4038.00	4040.18
28					4516.50	4516.10	4548.00	4545.93

续表

I	^{234}U		^{232}U		^{230}U		^{232}Th	
	Exp	Cal	Exp	Cal	Exp	Cal	Exp	Cal
2	43.48	43.66	47.57	47.43	51.72	51.67	49.37	49.45
4	143.34	143.70	156.27	156.16	169.50	169.25	162.12	162.33
6	296.04	296.70	322.30	322.20	347.00	347.00	333.20	333.65
8	497.02	497.11	540.70	540.42	578.30	578.22	556.90	557.31
10	741.20	741.01	805.50	805.29	856.50	856.43	827.00	827.04
12	1024.00	1023.44	1111.20	1111.42	1175.80	1175.91	1137.40	1137.04
14	1340.80	1340.26	1453.50	1453.82	1531.70	1532.00	1482.80	1482.26
16	1688.00	1687.95	1828.00	1828.17	1921.30	1921.10	1858.90	1858.56
18	2063.00	2063.62	2231.50	2230.79			2262.90	2262.64
20	2464.20	2464.96	2658.40	2658.69			2691.90	2691.97
22	2889.70	2890.18					3144.90	3144.70
24	3339.00	3337.96					3619.00	3619.50
26	3808.00	3807.34					4116.90	4116.48
28	4297.00	4297.65					4632.90	4632.06
I	^{230}Th				^{228}Th			
	Exp		Cal		Exp		Cal	
2	53.20		52.81		57.76		57.20	
4	174.06		173.25		186.82		186.00	
6	356.60		355.78		378.17		377.71	
8	594.10		593.68		622.28		622.65	
10	879.70		880.00		911.50		911.93	
12	1207.80		1208.56		1238.72		1238.25	
14	1572.90		1573.75		1595.90		1596.07	
16	1971.50		1971.15					
18	2397.80		2397.30					
20	2850.00		1549.37					
22	3325.00		3325.59					

实验值取自文献[5,6]

Description of Ground States in Even-Even Deformed Nuclei with q -Deformed Three-Parameter Formula *

FANG Xiang-Zheng^{2,3} RUAN Tu-Nan^{1,3}

1 (CCAST (World Lab), Beijing 100080, China)

2 (Department of Physics, Anhui University, Hefei 230039, China)¹⁾

3 (Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract With q -deformed three-parameter formula, the ground rotational bands of 29 even-even rare-earth and actinium nuclei have been calculated, and the fitting parameters have been analyzed. The calculated results show that the ground rotational bands of even-even nuclei may be described well by the rigid rotor with q -deformed moment of inertia.

Key words q -deformed moment of inertia, quantum algebra, softness coefficient, particle-hole

Received 19 January 2000, Revised 25 April 2000

* Supported by National Natural Science Foundation of China(19677102, 19775044 and 19775044), Doctoral Unit Research Program Foundation of the State Education Committee of China(97035807), Beijing Electron-Positron Collision of the National Laboratory and Lanzhou Center of Theoretical Nuclear Physics National Laboratory of Heavy Ion Accelerator

1) Mailing address