

# 用改进的格点哈密顿量计算 2 + 1 维 $SU(3)$ 胶球质量\*

刘金明 李洁明 郭硕鸿  
(中山大学物理系 广州 510275)

**摘要** 应用改进的格点哈密顿量和保持连续极限的耦合集团展开方法计算了 2 + 1 维  $SU(3)$   $0^+$  和  $0^-$  胶球的质量. 计算到三级近似, 标度行为已经很好. 与未改进的格点哈密顿量作的同样近似比较, 改进的结果较快地进入标度区, 而且标度性也较好.

**关键词** 格点规范理论 改进哈密顿量  $SU(3)$  胶球质量

## 1 引言

哈密顿量形式的格点规范理论是研究强相互作用粒子的能谱和波函数的最有效的非微扰方法. 最常用的格点哈密顿量是 Kogut - Susskind 哈密顿量<sup>[1]</sup>

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_x E_i^a(x) E_i^a(x) - \frac{1}{ag^2} \sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger). \quad (1)$$

式中  $a$  为格距,  $E_i^a(x)$  为规范场的色电场强,  $U_p$  为最小方块的 Wilson 圈.  $g$  为无量纲的耦合常数, 在 2 + 1 维, 它和不变电荷  $e$  的关系为  $g^2 = e^2 a$ . 对于  $SU(3)$  规范场, 常引进参数  $\beta = 6/g^2$  以观察各种物理量随  $\beta$  的变化情况. 当  $a \rightarrow 0$  时, (1) 式就趋于连续的 Yang - Mills 哈密顿量. 当  $a$  为有限大小时, (1) 式与相应的连续理论有  $O(a^2)$  的误差. 80 年代以来, 不断有人提出改进的格点作用量<sup>[2-4]</sup>, 目的是减小格点理论与连续理论之间的有限格距误差, 并预期会极大地减少格点理论的计算量. 最近, 本文作者之一与其他合作者们提出了与连续理论只有  $O(a^4)$  误差, 并且只含定域的和最近邻相互租用色电场强的改进的格点哈密顿量<sup>[5]</sup>. 我们应用此改进的哈密顿量计算了 2 + 1 维  $U(1)$  规范场的胶球质量<sup>[6]</sup> 和真空波函数<sup>[7]</sup>. 也计算了 2 + 1 维  $SU(2)$  规范场的胶球质量和真空波函数<sup>[8]</sup>. 结果表明, 应用此改进的哈密顿量作保持连续极限的耦合集团展开时, 在较低级近似就可以得到用未改进的哈密顿量作同样展开到较高级近似的结果. 本文的目的是把这个改进的格点哈密顿应用于 2 + 1 维  $SU(3)$  规范场的胶球质量. 计算到三级近似, 其标度性已经明

2000 - 03 - 08 收稿

\* 中国高等学校博士学科点专项科研基金和广东省自然科学基金资助

显改善了。(与未改进的哈密顿量的三级近似<sup>[9]</sup>比较)。

## 2 改进的格点哈密顿量

改进的格点哈密顿量已由文献<sup>[5]</sup>给出为

$$H = \frac{5}{6} \frac{g^2}{2a} \sum_{x,i} \{ E_i^a(x) E_i^a(x) + \frac{2}{5} \text{Tr}(\Lambda^a U_i(x) \Lambda^b U_i^\dagger(x)) E_i^a(x) E_i^b(x+i) \} - \frac{2}{g^2 a} \sum_{x,i < j} \left\{ \frac{5}{3} P_{ij} - \frac{1}{12} (R_{ij} + R_{ji}) \right\}. \quad (2)$$

式中  $\Lambda^a, \Lambda^b$  为  $SU(3)$  群的生成元,  $U_i(x)$  为由  $x$  点出发沿  $i$  方向的链上的规范群的群元素。

$$\sum_{x,i < j} P_{ij} = \sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger)/2 = \frac{1}{2} (\Pi + \text{h.c.}). \quad (3)$$

$$\sum_{x,i < j} R_{ij} = \frac{1}{2} (\text{□} + \text{h.c.}), \quad \sum_{x,i < j} R_{ji} = \frac{1}{2} (\text{□} + \text{h.c.}). \quad (4)$$

而  $\left\{ \frac{5}{3} P_{ij} - \frac{1}{12} (R_{ij} + R_{ji}) \right\}$  是为了令连续极限中  $a^2$  的系数为零, 使误差提高到  $O(a^4)$  的一种选择。当然, 这种选择不是唯一的, 可以采用另一种抵消  $O(a^2)$  项的图, 例如:

$$T_1 + \frac{1}{6} T_5, \quad (5)$$

式中

$$T_1 = \frac{1}{2} (\text{□} + \text{h.c.}), \quad T_5 = \frac{1}{4} \left( \text{⊗} + \frac{\text{⊗}}{2} + \text{h.c.} \right). \quad (6)$$

于是得到本文采用的改进的 2+1 维  $SU(3)$  规范场的格点哈密顿量为

$$H = \frac{5}{6} \frac{g^2}{2a} W. \quad (7)$$

$$W = \sum_{x,i} E_i^a(x) E_i^a(x) + \frac{2}{5} \text{Tr}(\Lambda^a U_i(x) \Lambda^b U_i^\dagger(x)) E_i^a(x) E_i^b(x+i) - \frac{2}{15} \beta^2 \left( T_1 + \frac{1}{6} T_5 \right). \quad (8)$$

取真空态为

$$|\Omega\rangle = e^R |0\rangle. \quad (9)$$

$|0\rangle$  为裸真空, 由  $E_i^a(x)|0\rangle = 0$  确定。  $R$  由 Wilson 圈组成,  $0^+$  和  $0^-$  胶球波函数可分别取为

$$|0^+\rangle = F^S(U) e^R |0\rangle, \quad |0^-\rangle = F^A(U) e^R |0\rangle. \quad (10)$$

$F^S(U)$  和  $F^A(U)$  由以下的本征方程确定

$$H|\Omega\rangle = \epsilon_0 |\Omega\rangle, \quad H|0^+\rangle = \epsilon_S |0^+\rangle, \quad H|0^-\rangle = \epsilon_A |0^-\rangle. \quad (11)$$

原则上可求出  $0^+$  胶球质量  $m_S$  和  $0^-$  胶球质量  $m_A$  分别为

$$m_S = \epsilon_S - \epsilon_0, \quad m_A = \epsilon_A - \epsilon_0. \quad (12)$$

然而,本征值方程(11)是难于求解的. 文献[9]已经证明,可以建立一种保持连续极限的耦合集团展开方法,将本征值方程截断,从而可以求得逐级近似解. 其中  $R, F^S$  和  $F^A$  分别按图的阶数展开为

$$R = R_1 + R_2 + \dots, F^S = F_1^S + F_2^S + \dots, F^A = F_1^A + F_2^A + \dots. \quad (13)$$

其中  $R_1 = c_1 T_1, F_1^S = s_1 T_1, F_1^A = a_1 T_1.$  (14)

而  $J_1 = \frac{1}{2}(\square - \text{h.c}).$  (15)

系数  $c_1, s_1,$  和  $a_1$  由截断的本征方程确定,高阶图则由较低阶的截断本征方程确定<sup>[6-9]</sup>.

对于  $R, F^S$  和  $F^A$  保持连续极限的  $N$  阶截断本征值方程分别为

$$\begin{aligned} & [E_i^a(x), [E_i^a(x), \sum_{k=1}^N R_k]] + \frac{2}{5} \text{Tr}(\Lambda_a U_i(x) \Lambda_b U_i^\dagger(x)) [E_i^a(x), [E_i^b(x+i), \sum_{k=1}^N R_k]] + \\ & \sum_{n_1+n_2 \leq N} [E_i^a(x), \sum_{k=1}^{n_1} R_k] [E_i^a(x), \sum_{l=1}^{n_2} R_l] + \frac{2}{5} \text{Tr}(\Lambda_a U_i(x) \Lambda_b U_i^\dagger(x)) [E_i^a(x), \sum_{k=1}^{n_1} R_k] \cdot \\ & [E_i^b(x+i), \sum_{l=1}^{n_2} R_l] - \frac{2}{15} \text{Tr} \beta^2 \left( T_1 + \frac{1}{6} T_3 \right) = w_0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & [E_i^a(x), [E_i^a(x), \sum_{k=1}^N F_k^S]] + \frac{2}{5} \text{Tr}(\Lambda_a U_i(x) \Lambda_b U_i^\dagger(x)) [E_i^a(x), [E_i^b(x+i), \sum_{k=1}^N F_k^S]] + \\ & \sum_{n_1+n_2 \leq N} 2 [E_i^a(x), \sum_{k=1}^{n_1} R_k] [E_i^a(x), \sum_{l=1}^{n_2} F_l^S] + \\ & \sum_{n_1+n_2 \leq N} \frac{2}{5} \text{Tr}(\Lambda_a U_i(x) \Lambda_b U_i^\dagger(x)) \{ [E_i^a(x), \sum_{k=1}^{n_1} R_k] [E_i^b(x+i), \sum_{l=1}^{n_2} F_l^S] + \\ & [E_i^a(x), \sum_{l=1}^{n_2} F_l^S] [E_i^b(x+i), \sum_{k=1}^{n_1} R_k] \} = (w_S - w_0) \sum_{l=1}^N F_l^S. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & [E_i^a(x), [E_i^a(x), \sum_{l=1}^N F_l^A]] + \frac{2}{5} \text{Tr}(\Lambda_a U_i(x) \Lambda_b U_i^\dagger(x)) [E_i^a(x), [E_i^b(x+i), \sum_{l=1}^N F_l^A]] + \\ & \sum_{n_1+n_2 \leq N} 2 [E_i^a(x), \sum_{k=1}^{n_1} R_k] [E_i^a(x), \sum_{l=1}^{n_2} F_l^A] + \\ & \sum_{n_1+n_2 \leq N} \frac{2}{5} \text{Tr}(\Lambda_a U_i(x) \Lambda_b U_i^\dagger(x)) \{ [E_i^a(x), \sum_{k=1}^{n_1} R_k] [E_i^b(x+i), \sum_{l=1}^{n_2} F_l^A] + \\ & [E_i^a(x), \sum_{l=1}^{n_2} F_l^A] [E_i^b(x+i), \sum_{k=1}^{n_1} R_k] \} = (w_A - w_0) \sum_{l=1}^N F_l^A. \end{aligned} \quad (18)$$

式中  $w_0 = \frac{5g^2}{12a} \epsilon_0, w_S = \frac{5g^2}{12a} \epsilon_S, w_A = \frac{5g^2}{12a} \epsilon_A.$  (19)

### 3 结果和讨论

2+1 维 SU(3)格点规范理论的标度行为是

$$m_0^+ a/g^2 \rightarrow \text{常数}, m_0^- a/g^2 \rightarrow \text{常数}. \quad (20)$$

逐级解方程组(17)–(19)得到三级近似, 所得结果  $m_0^+ a/g^2$  与  $\beta$  和  $m_0^- a/g^2$  与  $\beta$  的关系分别表示于图1和图2中. 图中分别将应用未改进的格点哈密顿量(1)式的结果<sup>[9]</sup>用虚线画在图中. 从两个图可见, 应用改进的格点哈密顿量(3)式时,  $m_0^+ a/g^2$  或  $m_0^- a/g^2$  的标度行为明显地改善了, 而且进入标度区的  $\beta$  值也较小. 值得指出的是具体的数值都比未改进的略小, 但比值  $m_0^+/m_0^-$  基本相同. 这是由于改进理论和未改进理论是两种不同的正规化方案, 因而它们具有不同的质量标度, 但是两种理论给出的物理质量比值是相同的. 应用(3)式所得为

$$m_0^+/m_0^- = 3.13/1.83 \approx 1.71. \quad (21)$$

而应用(1)式所得为

$$m_0^+/m_0^- = 3.60/2.10 \approx 1.70. \quad (22)$$

这些结果的一致性再次给出格点规范理论普适性的一个证据.

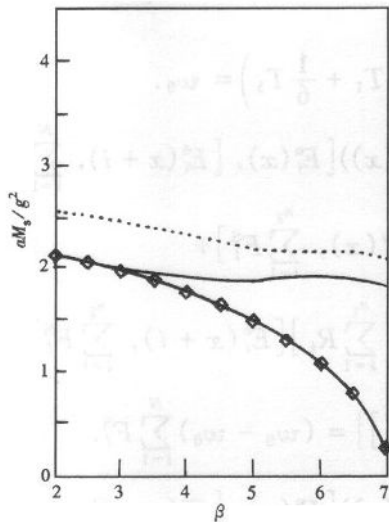


图1  $0^+$  胶球质量  $m_s$  的标度行为

—◇— order2, —order3.

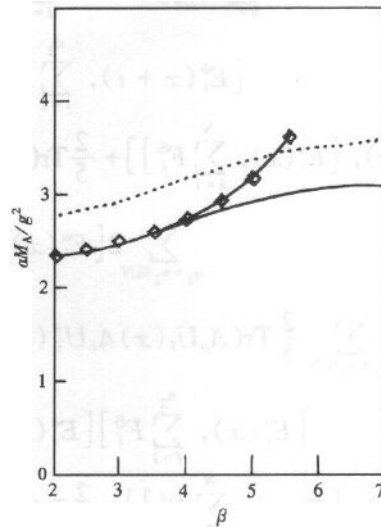


图2 0 胶球质量  $m_A$  的标度行为

—◇— order2, —order3.

我们曾用变分法对具有准确基态的格点哈密顿量计算  $m_0^+ a$  和  $m_0^- a$ , 由于两个格点哈密顿量虽然具有相同的经典的连续极限, 但量子效应是两者不属于同一个连续的量子理论, 因而具体的  $m_0^+ a/g^2$  和  $m_0^- a/g^2$  偏大, 但其比值  $m_0^+/m_0^-$  却基本相同<sup>[10]</sup> 为

$$m_0^+/m_0^- \approx 5.98/3.61 \approx 1.70. \quad (23)$$

这个有趣的现象值得进一步研究.

### 参考文献 (References)

- 1 Kogut J, Susskind L. Phys. Rev., 1975, D11:395
- 2 Symmanzik K, Nucl. Phys., 1983, B226:187
- 3 Hamber H, WU C M. Phys. Lett., 1983, B133:351

- 4 Lapage G P. Schladming Winter School Lectures, 1996
- 5 LUO X Q et al. Phys. Rev. , 1999, **D59**: 034503
- 6 LIU Jin-Ming et al. CCAST-WL Workshop Serise; Experimental and Theoretical Study of Glueballs (11), 1999
- 7 JIANG Jun-Qin et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. , 1999, **23**(12): 1152(in Chinese)  
(江俊勤等. 高能物理与核物理, 1999, **23**(12):1152)
- 8 LI Jie-Ming et al. Commun Theor. Phys. , Calculation of Vacuum Wavefunction and Mass Gap from Improved 2 + 1 D  $SU(2)$  Lattice Gauge Field Hamil-tonian. (to be Published)
- 9 CHEN Q Z et al. Phys. Lett. , 1995, **B348**:560
- 10 LIU Jin-Ming et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. , 1988, **12**(3): 420(in Chinese)  
(刘金明等. 高能物理与核物理, 1988, **12**(3):420)

## Glueball Mass in Improved $SU(3)$ Lattice Hamiltonian in 2 + 1 Dimensional

LIU Jin-Ming    LI Jie-Ming    GUO Shuo-Hong

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract** An improved lattice Hamiltonian is applied to the  $SU(3)$  lattice gauge theory in 2 + 1 dimensions. The glueball masses of  $0^+$  and  $0^-$  have been calculated by using the coupled-clusters expansion with the truncated eigenvalue equations in a scheme preserving the continuum limit. The calculations up to third-order are carried out, and the results show better scaling behavior than that given by non - improved one.

**Key words** lattice gauge theory, improved Hamiltonian,  $SU(3)$  glueball masses

---

Received 8 March 2000

\* Supported by Doctoral Foundation of Chinese Education Commission and National Natural Science Foundation of Guangdong Province