第26卷 第9期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol.26, No.9
2002年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sep., 2002

相位差与 q 变形广义相干叠加态的压缩特性*

梁麦林　袁兵

(天津大学理学院应用物理系　天津　300072)

摘要　对于 q 变形的非简谐振子广义相干态的叠加态 $|\beta\rangle + e^{i\varphi}|\beta e^{i\delta}\rangle$，其量子涨落的可能高阶压缩阶数可以表示为 $k \neq 2\pi n/\delta$，这里 n 是整数．当 $\delta=\pi$ 时，压缩阶数不能是偶数即只能是奇数，这正是 q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的结果．由此表明参数相位差 δ 对决定 q 变形的非简谐振子广义相干态叠加态的高阶压缩阶数起决定性作用．

关键词　非简谐振子　q 变形　广义相干态　叠加态　高阶压缩

1　引言

作为物理理论的基本模型之一，简谐振子代数的 q 变形已经引起了广泛注意[1—8]．人们对湮没算符的本征态或 q 变形相干态[2]，湮没算符平方的正交归一本征态或 q 变形奇偶相干态[3—5]进行了详细讨论．进一步，有作者[6]将这一思想推广到了非简谐振子模型之中，构造出了 q 变形非简谐振子的广义相干态以及广义奇偶相干态．王继锁等人[7]研究了 q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的高阶压缩性质，发现这些态可以呈现奇数阶压缩效应．令人惊奇的是没有 q 变形的非简谐振子的广义奇偶相干态[8]，q 形变的简谐振子的奇偶相干态[5]以及简谐振子的一般奇偶相干态[9]都具有类似的性质．这促使我们去探究其中的原因．

各种形式的奇偶相干态[5,7—9]都是相应相干态的叠加态，而叠加态的性质与叠加态中不同成分之间的相位差有重要关系．为此构造以下的 q 形变非简揩振子相干态的叠加态

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}[\,|\beta\rangle + e^{i\varphi}|\beta e^{i\delta}\rangle] \ , \tag{1}$$

其中 $|\beta\rangle$ 是 q 变形非简谐振子广义相干态[6]，满足 $a|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$，其中 a 是 q 变形非简谐振子的湮没算符．当 $\delta=\pi$，$\varphi=\pm\pi$ 时，上式就是 q 变形非简谐振子广义奇偶相干

2001-11-01 收稿

*教育部留学回国人员基金资助

态[6,7]. 而非简谐振子的广义奇偶相干态[8], q 形变的简谐振子的奇偶相干态[5]以及简谐振子的一般奇偶相干态[9]都是 q 变形非简谐振子广义奇偶相干态[6,7]在一定条件下的特例. 研究后发现,参数相位差 δ 在决定压缩阶数时起关键作用. 例如,当 δ 取 π 时,叠加态(1)式的高阶压缩阶数只能是奇数,而如果 δ 取 $\pi/4$,叠加态(1)式就可以有偶数阶的压缩. 定义

$$G = \langle\beta|\beta e^{i\delta}\rangle = |G|e^{i\lambda}, \tag{2a}$$

则叠加态(1)式的归一化系数可表示为

$$N = 2[1 + |G|\cos(\varphi + \lambda)] . \tag{2b}$$

下面分析叠加态(1)式的高阶振幅压缩性质[10].

2　参数相位差与高阶振幅压缩

高阶振幅压缩的概念首先由 Zhang 等人提出[10]. 文献[5,7]将高阶振幅压缩的概念应用于 q 变形的偶奇相干态以及 q 变形非简谐振子的广义偶奇相干态,并给出了压缩特点. 设 a^+, a 是 q 变形的产生算符和湮没算符. 用它们可定义两个厄密算符

$$X_1 = (a^{+k} + a^k)/2,\ X_2 = i(a^{+k} - a^k)/2 , \tag{3}$$

相应的对易关系和测不准关系为

$$[X_1, X_2] = \frac{i}{2}[a^k, a^{+k}] , \tag{4a}$$

$$\langle\Delta X_1^2\rangle\langle\Delta X_2^2\rangle \geqslant \left\{\frac{1}{4}[a^k, a^{+k}]\right\}^2. \tag{4b}$$

如果

$$\langle\Delta X_1^2\rangle - \frac{1}{4}\langle[a^k, a^{+k}]\rangle = \frac{1}{4}[2\langle a^{+k}a^k\rangle + \langle a^{2k} + a^{+2k}\rangle - \langle a^k + a^{+k}\rangle^2] \equiv \Delta X_1 < 0 , \tag{5a}$$

或者

$$\langle\Delta X_2^2\rangle - \frac{1}{4}\langle[a^k, a^{+k}]\rangle = \frac{1}{4}[2\langle a^{+k}a^k\rangle - \langle a^{2k} + a^{+2k}\rangle + \langle a^k - a^{+k}\rangle^2] \equiv \Delta X_2 < 0 , \tag{5b}$$

则称变形光场存在 k 阶的振幅压缩.

在算符 a^k 的作用下

$$a^k|\Psi\rangle = \frac{\beta^k}{\sqrt{N}}[|\beta\rangle + e^{i(\varphi+k\delta)}|\beta e^{i\delta}\rangle] \tag{6}$$

通过一定的运算后,有关的平均值可以为如下形式:

$$\langle a^{+k}a^k\rangle = \frac{2}{N}|\beta|^{2k}[1 + |G|\cos(\varphi + \lambda + k\delta)] , \tag{7a}$$

$$\langle(a^k + a^{+k})\rangle = \frac{2}{N}|\beta|^k[\cos k\theta + \cos(k\theta + k\delta) + |G|\cos(\varphi + \lambda - k\theta) + |G|\cos(\varphi + \lambda + k\theta + k\delta)] , \tag{7b}$$

$$\langle (a^{2k} + a^{+2k}) \rangle = \frac{2}{N} |\beta|^{2k} [\cos 2k\theta + \cos 2(k\theta + k\delta) + |G|\cos(\varphi + \lambda - 2k\theta) + |G|\cos(\varphi + \lambda + 2k\theta + 2k\delta)] \ , \tag{7c}$$

$$\langle (a^{k} - a^{+k}) \rangle = \frac{2\mathrm{i}}{N} |\beta|^{k} [\sin k\theta + \sin(k\theta + k\delta) - |G|\sin(\varphi + \lambda - k\theta) + |G|\sin(\varphi + \lambda + k\theta + k\delta)] \ , \tag{7d}$$

以上各式中 θ 是 β 的相位. 如果

$$k\delta = 2\pi p \ , \tag{8}$$

其中 p 是整数,则各平均值成为

$$\begin{aligned} &\langle a^{+k}a^{k} \rangle = |\beta|^{2k}, \langle (a^{k} + a^{+k}) \rangle = 2|\beta|^{k}\cos k\theta, \\ &\langle (a^{2k} + a^{+2k}) \rangle = 2|\beta|^{2k}\cos 2k\theta, \langle (a^{k} - a^{+k}) \rangle = 2\mathrm{i}|\beta|^{k}\sin k\theta \ . \end{aligned} \tag{9}$$

利用(9)式,容易得出 $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0$,即在(8)式的前提下两分量 X_1, X_2 都不存在压缩. 这时态(1)式是 X_1, X_2 的最小测不准态. 通过这里的讨论也知道了叠加态(1)式有压缩的前提条件是(8)式不成立,或者压缩阶数满足

$$k \neq 2\pi p/\delta \ . \tag{10}$$

当 $\delta = \pi$ 时, $k \neq 2p$ 即压缩阶数不能是偶数只能是奇数;当 $\delta = \pi/2$ 时, $k \neq 4p$ 即可能的压缩阶数为 $k = 4p+1, 4p+2, 4p+3$;如果 $\delta = \pi/4$, $k \neq 8p$ 或 k 的可能值为 $k = 8p+1, 8p+2, \cdots, 8p+7$,也可以是偶数. 进一步容易看出,如果 δ 是 π 的无理数倍,例如 $\delta = \sqrt{2}\pi, \sqrt{3}\pi$,则可能的压缩阶数是任意的.

下面举一个具体例子来表明偶数阶的压缩确实可以存在. 考虑 $\delta = \pi/4$, $k = 2$,进一步令 $\varphi + \lambda = 0$,利用(7)式可算出

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2}|\beta|^4 \left[\frac{1}{1 + |G|} - \frac{1}{2}(1 - \sin 4\theta) \right] \ . \tag{11}$$

如果选取 θ 使 $\sin 4\theta = -1$,则总有 $\Delta X_1 < 0$ 即总有压缩存在. 对于 $\varphi + \lambda = \pi$

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2}|\beta|^4 \left[\frac{1}{1 - |G|} - \frac{1}{2}(1 - \sin 4\theta) \right] \ . \tag{12}$$

当 $|G| < 1$ 时, ΔX_1 不可能小于零所以没有压缩;当 $|G| > 1$ 时, ΔX_1 总小于零所以总有压缩.

3 结束语

在以上的讨论中,没有给出 G 的具体形式,这使得本文的结论有更大的应用范围. 算符 a 可以是任意的湮没算符,那么由其相干态组成的叠加态(1)式就具有本文所讨论的性质.

参考文献(References)

1 Biedenharn L C. J. Phys., 1989, **A22**(18): 873

2 HAO San-Ru. Acta Phys. Sin., 1993, **42**(7): 1057(in Chinese)
(郝三如. 物理学报, 1993, **42**(7): 1057)

3 KUANG L M, WANG F B. Phys. Lett., 1992, **A169**(4): 225

4 WANG F B, KUANG L M. J. Phys., 1993, **A26**(2): 293

5 WANG Zhong-Qing. Acta Phys. Sin., 2001, **50**(4): 690(in Chinese)
(汪仲清. 物理学报, 2001, **50**(4): 690)

6 XU Zi-Wen. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**: 436(in Chinese)
(徐子驳. 高能物理与核物理, 1999, **23**: 436)

7 WANG Ji-Suo, LIU Tang-Kun, ZHAN Ming-Sheng. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**: 11(in Chinese)
(王继锁, 刘堂昆, 詹明生. 高能物理与核物理, 2001, **25**: 11)

8 YU Zhao-Xian, WANG Ji-Suo et al. Acta Phys. Sin., 1997, **46**: 1693(in Chinese)
(于肇贤, 王继锁等. 物理学报, 1997, **46**: 1693)

9 SUN J Z et al. Chinese J of Quantum Electronics, 1992, **9**(4): 397(in Chinese)
(孙金祚等. 量子电子学, 1992, **9**(4): 397)

10 ZHANG Z et al. Phys. Lett., 1990, **A150**(1): 27

Phase Difference and the Squeezing Property of the Superpositions of the q-Deformed Generalized Coherent States*

LIANG Mai-Lin　YUAN Bing

(Department of Applied Physics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract　It is shown that the possible higher squeezing order of the superposition state $|\beta\rangle + e^{i\varphi}|\beta e^{i\delta}\rangle$ of the generalized coherent states of the q-deformed non-harmonic oscillator can be expressed as $k \neq 2\pi n/\delta$, with n an integer and δ the phase difference between the two generalized coherent states. When $\delta = \pi$, the order of squeezing can only be odd, which is just the result of the generalized even and odd coherent states of the q-deformed non-harmonic oscillator; when δ takes other values, the squeezing order can be even. These results show that the parameter phase difference δ plays the key role in determining the possible squeezing order.

Key words　non-harmonic oscillator, q-deformed, generalized coherent state, superposition state, higher-order squeezing

---

Received 1 November 2001

* Supported by China Education Department's Foundation for Returned Scholars