

格点规范场的真空波函数和真空能量的 无规相近似计算^{*}

惠萍¹⁾

(广东教育学院物理系 广州 510303)

摘要 采用无规相近似(RPA)耦合集团展开方法,计算出 2+1 维 $SU(2)$ 格点规范场的三到六阶真空波函数和真空能量. 在计算中,用空心图构成试探波函数,得到的三到六阶真空波函数的计算结果在弱耦合区 $1/g^2 > 1.2$ 都表现出良好的标度行为. 与较早的计算结果比较,采用 RPA 方法计算的真空波函数比采用非 RPA 方法计算的结果的标度行为有大幅度的改善. 采用 RPA 方法计算的真空能量比采用非 RPA 方法计算的真空能量略低,这表明此方法是成功的方法.

关键词 格点规范场 真空波函数 真空能量

1 引言

在文献[1,2]中,提出了一个新的方法,将无规相近似(RPA)方法应用到耦合集团展开方法中,成功地用于 2+1 维 $SU(3)$ 格点规范理论(LGT)的计算,并把 2+1 维 $SU(3)$ 格点规范理论的计算从原来的三阶提高到四阶,得到的真空波函数比文献[3]更令人满意. 在此方法中,相连接的 Wilson 圈图用空心 Wilson 圈图来表示,不同图形之间变换的原则是服从么模条件. 在较早的计算中^[4,5]发现,随着计算阶数的增加, Wilson 圈图数目也迅速的增加,集团也增大, Wilson 圈图数目的增加和集团的增大使更高阶圈图的对易运算变得极其复杂,利用么模条件进行变换也变得相当繁琐,因此薛定谔方程很难解出. 在我们提出的新方法中,不仅采用空心 Wilson 圈图来展开真空波函数,而且把小的圈图取平均值,再利用费曼定理求出小圈图的平均值,使高阶的计算能顺利进行,并取得很好的效果,也对 2+1-D $SU(2)$ 格点规范场和 3+1-D $SU(3)$ 格点规范场进行了初步的研究^[6-8]. 本文将把上述新方法运用于六阶 2+1-D $SU(2)$ 格点规范场的真空波函数和真空能

量的研究中.

2 真空波函数和本征方程

2+1-D $SU(2)$ LGT 的哈密顿量 H 是

$$H = \frac{g^2}{2a} \left[\sum_l E_l^2 E_l^2 - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right], \quad (1)$$

其中 $E_\lambda |0\rangle = 0$, a 是格距, g 为无量纲的耦合常数,它与不变荷 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$. 在 $g^2 \rightarrow 0$ 的弱耦合区, $a \rightarrow 0$. 设真空波函数的表达式是

$$|\Omega\rangle = e^{R(U)} |0\rangle, \quad (2)$$

其中 $R(U)$ 是由规范不变算符 Wilson 圈图 U 组成. $R(U)$ 按照图的阶数展开为

$$R(U) = \sum_n R_n, \quad (3)$$

其中 R_n 为所有的第 n 阶图. H 的本征方程是

$$H|\Omega\rangle = \epsilon_0 |\Omega\rangle, \quad (4)$$

其中 ϵ_0 为真空能量. 设 $w = \frac{2a}{g^2} H$, 则 $w|\Omega\rangle = w_0 |\Omega\rangle$, 真空能量 ϵ_0 与 w_0 的关系为 $\epsilon_0 = w_0 g^2 / 2a$. 将式(1)–(3)代入式(4)得到

2003-07-24 收稿

^{*} 广东省自然科学基金(33446), 广东教育学院教授、博士科研专项经费和广东省高校自然科学基金资助

1) E-mail: Huiping519@163.net

$$\sum_i \{ [E_i^\alpha, [E_i^\alpha, R]] + [E_i^\alpha, R][E_i^\alpha, R] \} - \frac{4}{g^4} \sum_P \text{Tr} U_P = w_0. \quad (5)$$

并采用文献[9,10]的方法把方程(5)在 N 阶截断得到

$$\sum_i [E_i^\alpha, [E_i^\alpha, \sum_{n=1}^N R_n]] + \sum_{n+n' \leq N} [E_i^\alpha, R_n][E_i^\alpha, R_{n'}] \} - \frac{4}{g^4} \sum_P \text{Tr} U_P = w_0. \quad (6)$$

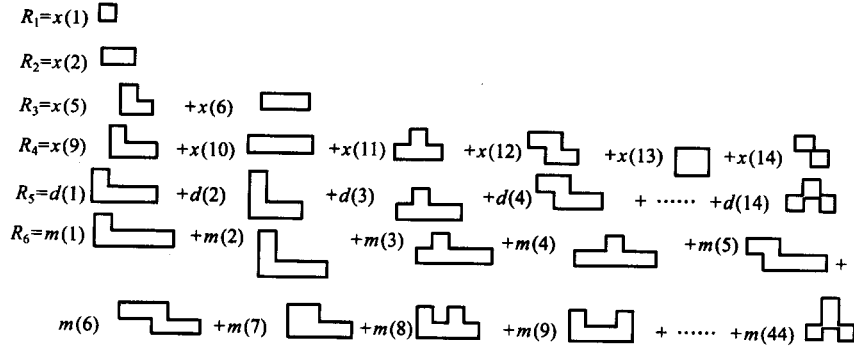


图 1 一到六阶空心图

是由方程(6)中 $[E_i, R_i][E_i, R_j]$ 的计算结果产生. 将这些 Wilson 圈图代入薛定谔方程计算方程中对易式中, 然后求解截断到六阶的薛定谔方程得到真空波函数的 μ_0 和 μ_2 及真空能量 ϵ_0 . 在计算中, 对于相连图和复杂的多图组态利用么模条件(7)式和文献[1,2]的无规相近似方法来处理, 其中 4 个小图用平均值来代替, 它们并分别用 $x(3), x(4), x(7), x(8)$ 符号来表示

$$x(3) = \langle \square \rangle, \quad x(4) = \langle \text{rectangle} \rangle, \\ x(7) = \langle \text{U-shape} \rangle, \quad x(8) = \langle \text{notched shape} \rangle.$$

可以得到关于 68 个图的系数 $x(i), d(i), m(i)$ 和 $x(3), x(4), x(7), x(8)$ 的共 72 个独立方程所组成的封闭方程组(略). w_0 的表达式为

$$w_0 = -4x(1)^2 - 3x(2)^2 - 4x(5)^2 - 4x(6)^2$$

设 $w' = w + x(1)' \square + x(2)' \text{rectangle} + x(5)' \text{U-shape} + x(6)' \text{notched shape}$, 采用文献[1,2]的方法, 应用 Feymann 定理可以得到 $x(3), x(4), x(7)$ 和 $x(8)$ 的表达式

$$x(3) = \frac{\partial w'}{\partial x(1)'} = - \left[8x(1) + 6x(2) \frac{\partial x(2)}{\partial x(1)} + 8x(5) \frac{\partial x(5)}{\partial x(1)} + 8x(6) \frac{\partial x(6)}{\partial x(1)} \right] \frac{\partial x(1)}{\partial x(1)'}, \\ x(4) = \frac{\partial w'}{\partial x(2)'} = - \left[8x(1) \frac{\partial x(1)}{\partial x(2)} + 6x(2) + \right.$$

首先选择空心图的线性组合作为真空波函数, 对于相连图, 将用么模条件

$$2\delta_{\alpha\beta} = 2(U^3)_{\alpha\beta} - 2(\text{Tr} U)(U^2)_{\alpha\beta} + [(\text{Tr} U)^2 - \text{Tr}(U^2)] U_{\alpha\beta} \quad (7)$$

进行变换. (3)式中的 $R(U)$ 从一阶到六阶的独立空心图见图 1.

一阶和二阶图都是 1 个, 三阶图 2 个, 四阶图 6 个, 五阶图 14 个, 六阶图 44 个, 共 68 个. $i + j$ 阶图

$$8x(5) \frac{\partial x(5)}{\partial x(2)} + 8x(6) \frac{\partial x(6)}{\partial x(2)} \Big] \frac{\partial x(2)}{\partial x(2)'}, \\ x(7) = \frac{\partial w'}{\partial x(5)'} = - \left[8x(1) \frac{\partial x(1)}{\partial x(5)} + 6x(2) \frac{\partial x(2)}{\partial x(5)} + 8x(5) + 8x(6) \frac{\partial x(6)}{\partial x(5)} \right] \frac{\partial x(5)}{\partial x(5)'}, \\ x(8) = \frac{\partial w'}{\partial x(6)'} = - \left[8x(1) \frac{\partial x(1)}{\partial x(6)} + 6x(2) \frac{\partial x(2)}{\partial x(6)} + 8x(5) \frac{\partial x(5)}{\partial x(6)} + 8x(6) \right] \frac{\partial x(6)}{\partial x(6)'},$$

μ_0 和 μ_2 的表达式为

$$\mu_0 = \{ x(1)/2 + 2x(2) + 9[x(5) + x(6)]/2 + 8[x(9) + x(10) + x(11) + x(12) + x(13)] + 2x(14) + 25[d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) + d(6) + d(7) + d(8) + d(9) + d(10) + d(11) + d(12)]/2 + 9[d(13) + d(14)]/2 + 18[m(1) + m(2) + m(3) + m(4) + m(5) + m(6) + m(7) + m(8) + m(9) + m(10) + m(11) + m(12) + m(13) + m(14) + m(15) + m(16) + m(17) + m(18) + m(19) + m(20) + m(21) + m(22) + m(23) + m(24) + m(25) + m(26) + m(27) + m(28) + m(29) + m(30) + m(31) + m(32) + m(33) + m(34) + m(35)] + 8[m(36) + m(37) + m(38) + m(39) + m(40) + m(41) + m(42) + m(43) + m(44)] \} g^4, \\ \mu_2 = \{ x(2)/4 + x(5) + 3x(6)/2 + 5x(9) + 7x(10)/2$$

$$\begin{aligned}
 &+ 3x(11) + 11x(12)/4 + 2x(13) + x(14)/2 + 19x(1)/ \\
 &2 + 8d(2) + 15d(3)/2 + 8d(4) + 5d(5) + 13d(6)/2 + \\
 &15d(7)/2 + 6d(8) + 13d(9)/2 + 7d(10) + 25d(11)/2 \\
 &+ 5d(12) \} + 2d(13) + 2d(14) + [85m(1) + 69m(2) \\
 &+ 70m(3) + 65m(4) + 73m(5) + 69m(6) + 49m(7) \\
 &+ 2m(8) + 65m(9) + 69m(10) + 56m(11) + \\
 &53m(12) + 60m(13) + 53m(14) + 52m(15) + \\
 &62m(16) + 49m(17) + 40m(18) + 41m(19) + \\
 &45m(20) + 44m(21) + 57m(22) + 41m(23) + \\
 &53m(24) + 53m(25) + 50m(26) + 49m(27) + \\
 &37m(28) + 33m(29) + 41m(30) + 34m(31) + \\
 &105m(32) + 46m(33) + 41m(34) + 52m(35)] + \\
 &23m(36) + 22m(37) + 23m(38) + 24m(39) + \\
 &14m(40) + 16m(41) + 19m(42) + 19m(43) + \\
 &19m(44)]/4 \} g^8.
 \end{aligned}$$

3 数值计算和结果讨论

本文计算出的 2+1 维 $SU(2)$ 格点规范场的真空波函数 μ_0 和 μ_2 随着 $1/g^2$ 的变化曲线如图 2 所示. 图中, 从三阶到六阶的真空波函数 μ_0 和 μ_2 的计算结果在弱耦合区 ($1/g^2 > 1.2$) 各阶都显示良好的标度行为, 并趋于平坦的直线, 这是一个令人十分满意的结果, 预计更高阶的 μ_0 和 μ_2 的结果也具有同样的行为趋势, 阶数不同, 收敛的结果可能不同. 从本文对 2+1 维 $SU(2)$ 格点规范场的真空波函数各阶的计算结果和文献 [1] 对 2+1 维 $SU(3)$ 格点规范场的真空波函数的计算结果推断, 它们的收敛性应有对应关系, 但这有待于理论证明.

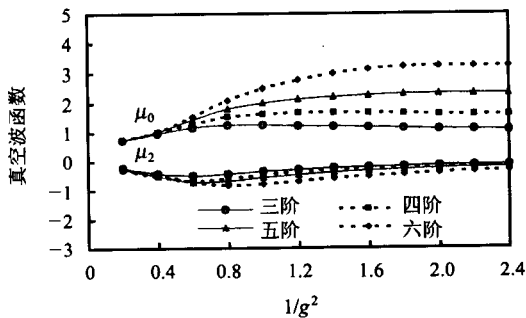


图 2 采用 RPA 方法得到的三阶至六阶真空波函数

图 3 展示了采用非 RPA 耦合集团展开方法得到的 2+1-D $SU(2)$ 格点规范场的真空波函数计算结果^[4,9,10,11], 把图 3 显示的二阶至五阶 μ_2 的计算结果与上面的结果相比较发现: 两种方法中 μ_2 的结

果没有大的区别, 但 μ_0 的结果差别就相当大. 在图 3 显示的结果中, 除了三阶结果有收敛行为, 其余的 μ_0 的标度行为有发散趋势, 且从低阶计算结果的无规律性无法预测更高阶结果的行为.

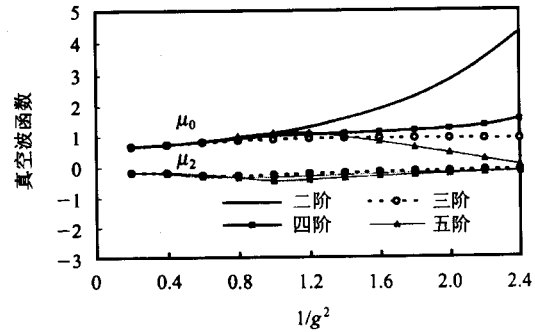


图 3 采用非 RPA 方法得到的真空波函数

图 4 展示了 w_0 随着 $1/g^2$ 的变化的曲线, 从图 4 看到从三阶到六阶的 w_0 变化不大, 在强耦合区 ($1/g^2 < 1.0$) 各阶都相同, 在弱耦合区 ($1/g^2 > 1.0$) 各阶略有不同, 阶数越高 w_0 越低, 符合收敛的规律.

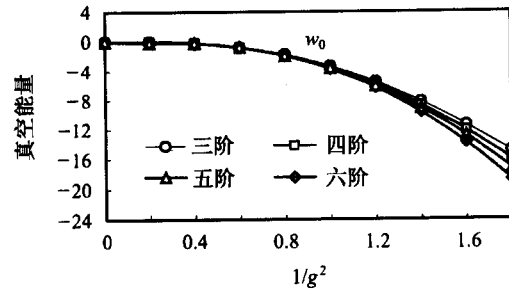


图 4 RPA 方法三阶到六阶的真空能量

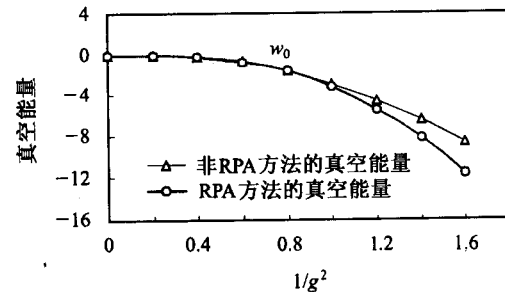


图 5 三阶真空能量的比较

图 5 展示了采用两种方法的三阶 w_0 随着 $1/g^2$ 的变化的曲线的比较, 采用 RPA 方法计算的 w_0 比采用非 RPA 方法计算的结果的略低, 这表明此方法是成功的方法. 把这种方法推广到 3+1-D $SU(3)$ 格点规范理论的计算中具有更大的意义.

参考文献 (References)

- 1 HUI P et al. Phys. Rev., 2000, **D62**:034505-1-5
- 2 FANG X Y et al. Phys. Rev., 2002, **D65**:114505-1-3
- 3 CHEN Q Z, LUO X Q, GUO S H. Phys. Letters, 1995, **B341**:349—354
- 4 HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1998, **22**(4):322—325 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 1998, **22**(4):322—325)
- 5 HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**(12):1171—1176 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 1999, **23**(12):1171—1176)
- 6 HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(6):490—494 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 2000, **24**(6):490—494)
- 7 HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(7):636—641 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 2000, **24**(7):636—641)
- 8 HU Lian, HUI P, CHEN Q Z. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2002, **26**(8):773—778 (in Chinese)
(胡连, 惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理, 2002, **26**(8):773—778)
- 9 GUO S H, CHEN Q Z, Li L. Phys. Rev., 1994, **D49**:507—510
- 10 CHEN Q Z, GUO S H, ZHENG W H et al. Phys. Rev., 1994, **D50**(5):3564—3565
- 11 HUI P, CHEN Q Z. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1995, **19**(9):820—825 (in Chinese)
(惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1995, **19**(9):820—825)

Approximated Calculation of the Vacuum Wave Function and Vacuum Energy of the LGT with RPA Method*

HUI Ping¹⁾

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

Abstract The coupled cluster method is improved with the random phase approximation (RPA) to calculate vacuum wave function and vacuum energy of $2 + 1 - D$ $SU(2)$ lattice gauge theory. In this calculating, the trial wave function composes of single-hollow graphs. The calculated results of vacuum wave functions show very good scaling behaviors at weak coupling region $1/g^2 > 1.2$ from the third order to the sixth order, and the vacuum energy obtained with RPA method is lower than the vacuum energy obtained without RPA method, which means that this method is a more efficient one.

Key words lattice gauge theory, vacuum wave function, vacuum energy

Received 24 July 2003

* Supported by Guangdong Provincial Natural Science Foundation (33446), Guangdong Education Institute Professorial and Doctoral Foundation and Higher Education Natural Science Foundation of Guangdong Province

1) E-mail: Huiping519@163.net