

q 变形对相干态的相位概率分布特性*

汪仲清^{1,2;1)} 段昌奎^{1,2}

1 (重庆邮电学院光电工程学院 重庆 400065)

2 (重庆市微电子工程重点实验室 重庆 400065)

摘要 通过推广 Pegg 和 Barnett 的相位算符和相位态到 q 变形的双模情况, 应用数值计算研究了 q 变形对相干态的相位概率分布特性. 结果表明, q 变形对相干态的相位概率分布受到相位参数、 q 参数和参数 $|\xi|$ 的调节, 从而反映出不同的量子相干特性.

关键词 q 变形 对相干态 相位概率分布 量子干涉特性

1 引言

在近代量子理论中, 相位是一个极其重要的物理量, 它与许多物理现象密切相关. 特别是在量子光学中, 相位问题一直备受人们重视. 高强度相干态具有半经典的粒子数-相位不确定关系的性质^[1], 压缩态的相位仍保持它的量子特性^[2], 人们对压缩相干态的相位特性进行了深入研究^[2, 3]. 20 世纪 80 年代末期, Pegg 和 Barnett 提出了量子光场厄米相位算符和相位态^[4-6], 这使人们可以从本质上进一步研究量子光场的相位问题. 应用 Pegg 和 Barnett 的相位理论, 人们对相干态光场^[6-8]、压缩态光场^[9, 10]、Roy 型奇偶非线性相干态^[11] 和 Jaynes-Cummings 模型^[12] 的相位特性作了较为广泛的研究.

对相干态(Pair Coherent State)是一种重要的非经典态, 它描述的场是一种关联双模场, 可用于研究原子或离子双光子共振激发相关的系统^[13]. 有关对相干态、非线性对相干态及其非经典特性的研究有过一些工作^[13-15]. 文献[16]将对相干态推广到 q 参数变形的情况, 研究了 q 变形对相干态的反聚束效应和两模间的关联特性. 本文在此基础上, 将 Pegg 和 Barnett 的相位态和相位算符推广到 q 参数变形的情况, 研究 q 变形对相干态的相位概率分布特性.

2 q 变形对相干态

q 变形玻色产生算符 a_q^+ 和湮没算符 a_q 以及数算符 N_q 构成的 q -Heisenberg 代数满足如下关系式^[17]

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-N_q}, \quad (1)$$

$$[N_q, a_q^+] = a_q^+, \quad [N_q, a_q] = -a_q, \quad (2)$$

其中 q 为变形参数. a_q, a_q^+ 和 N_q 作用于 q -Fock 空间 $|n\rangle_q (n=0, 1, 2, \dots)$

$$a_q |n\rangle_q = \sqrt{[n]} |n-1\rangle_q, \quad (3)$$

$$a_q^+ |n\rangle_q = \sqrt{[n+1]} |n+1\rangle_q, \quad (4)$$

$$N_q |n\rangle_q = n |n\rangle_q, \quad (5)$$

方括号记为 q 参数变量, 即 $[x] = (q^x - q^{-x}) / (q - q^{-1})$, $|n\rangle_q$ 定义为

$$|n\rangle_q = \frac{(a_q^+)^n}{\sqrt{[n]!}} |0\rangle_q, \quad (6)$$

其中 q 阶乘 $[n]! = [n][n-1] \dots [1]$, 并且 $[0] = 1$. 这样 q -Fock 空间构成一个完备的 Hilbert 空间

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle_q \langle n| = I. \quad (7)$$

2005 - 06 - 30 收稿

* 国家自然科学基金(10474092)资助

1) E-mail: wangzhq@cqupt.edu.cn

对相干态(Pair Coherent State)首先由Agarwal基于非线性光学中光子的成对产生或湮没等问题提出^[13, 14]. 考虑一个双模场, a_1^+ , a_2^+ 和 a_1 , a_2 分别为两模的产生和湮没算符, 而 $a_1 a_2$ 是对湮没算符, 定义对相干态为对湮没算符的本征态

$$a_1 a_2 |\xi, m\rangle = \xi |\xi, m\rangle, \quad (8)$$

其中 $\xi = |\xi|e^{i\varphi}$ 为复数, m 为两模粒子数算符之差作用于对相干态 $|\xi, m\rangle$ 后的本征值

$$(a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2) |\xi, m\rangle = m |\xi, m\rangle, \quad (9)$$

因此, 无论粒子是成对产生还是成对湮没, 差值 m 保持为一个常数. 不失一般性, 假定 m 为正整数, 在粒子数态表象中, $|\xi, m\rangle$ 可表示为

$$|\xi, m\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n+m, n\rangle, \quad (10)$$

其中

$$C_n = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n!(n+m)!]} \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!(n+m)!}}.$$

文献[16]将双模产生算符、湮没算符、粒子数算符和对相干态推广到 q 参数变形的情况, 得到如下的 q 变形对相干态

$$|\xi, m\rangle_q = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\varphi} |n+m, n\rangle_q, \quad (11)$$

式中

$$C_n = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n]![n+m]!} \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{|\xi|^n}{\sqrt{[n]![n+m]!}}, \quad (12)$$

根据(3)—(5)式, q 变形对湮没算符和两模粒子数算符差作用(11)式后满足关系式

$$a_{q,1} a_{q,2} |\xi, m\rangle_q = \xi |\xi, m\rangle_q, \quad (13)$$

$$(N_{q,1} - N_{q,2}) |\xi, m\rangle_q = m |\xi, m\rangle_q. \quad (14)$$

3 q 变形对相干态的相位概率分布性质

Pegg 和 Barnett 的相位算符是基于有限的 $(s+1)$ 维 Hilbert 空间的一组正交完备相位态矢来定义^[4, 5]

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (m=0, 1, 2, \dots, s), \quad (15)$$

式中相位 θ_m 为

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2m\pi}{s+1}, \quad (m=0, 1, 2, \dots, s), \quad (16)$$

θ_0 为参考相位. 在 Pegg 和 Barnett 的理论中, 所有相位变量相关的期待值在 $(s+1)$ 维 Hilbert 空间中进行计算, 然后让 s 趋于无穷得到结果. 在该空间中, 厄米相位算符定义为

$$\Phi_\theta = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (17)$$

于是有 $\Phi_\theta |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle$.

对于单模场 $|\psi\rangle$, 其相位概率分布函数为

$$P(\theta) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+1}{2\pi} |\langle \theta_m | \psi \rangle|^2, \quad (18)$$

对于 q 变形的双模场 $|\psi\rangle_q$, 可以引入 q 变形的双模相位态

$$|\theta_{m_1}, \theta_{m_2}\rangle_q = \frac{1}{s+1} \sum_{n_1, n_2=0}^s e^{i(n_1 \theta_{m_1} + n_2 \theta_{m_2})} |n_1, n_2\rangle_q, \quad (19)$$

式中

$$\theta_{m_i} = \theta_{0_i} + \frac{2m_i \pi}{s+1}, \quad (i=1, 2; \quad m_i=0, 1, 2, \dots, s), \quad (20)$$

相应的相位算符为

$$\Phi_{m_i} = \sum_{m_1, m_2=0}^s \theta_{m_i} |\theta_{m_1}, \theta_{m_2}\rangle_{qq} \langle \theta_{m_2}, \theta_{m_1}|, \quad (i=1, 2), \quad (21)$$

则相位概率分布函数可表示为

$$P(\theta_1, \theta_2) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s+1}{2\pi} \right)^2 |{}_q \langle \theta_{m_1}, \theta_{m_2} | \psi \rangle_q|^2, \quad (22)$$

应用(11)式和(19)式, 经过计算得到

$$|{}_q \langle \theta_{m_1}, \theta_{m_2} | \xi, m \rangle_q|^2 = \frac{1}{(s+1)^2} \times \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} C_n C_k \cos[(n-k)(\varphi - \theta_{m_1} - \theta_{m_2})] \right\}, \quad (23)$$

将参考相位 θ_{0_i} ($i=1, 2$) 作如下选取

$$\theta_{0_i} = \frac{\varphi}{2} - \frac{s\pi}{s+1}, \quad (i=1, 2), \quad (24)$$

由(20)式和(24)式可以得到

$$\theta_{m_i} = \frac{\varphi}{2} + \frac{2\mu_i \pi}{s+1}, \quad (i=1, 2), \quad (25)$$

其中 $\mu_i = m_i - s/2$, 是从 $-s/2$ 到 $s/2$ 整数步长的新相位标号. 这样选取 θ_{0_i} 后使相位分布相对于 μ_i 对称. 将(25)式代入(23)式, 在 $s \rightarrow \infty$ 的连续谱极限下, θ_{m_i} 为连续变量, 用 $d\theta$ 代替 $2\pi/(s+1)$, 则 $2\pi\mu_i/(s+1)$ 可以

用 θ_i 来代替, 连续相位概率分布函数(22)式可表示为

$$P(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k}^{\infty} C_n C_k \cos[(n-k)(\theta_1 + \theta_2)] \right\},$$

$$(-\pi \leq \theta_i \leq \pi, \quad i = 1, 2). \quad (26)$$

其中 C_n 和 C_k 由(12)式给出. 显然分布函数 $P(\theta_1, \theta_2)$ 是归一化的

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = 1. \quad (27)$$

应用(12)式(取 $m = 2$)对(26)式作数值计算, 可以得到 q 变形对相干态的连续相位概率分布如图1和图2所示.

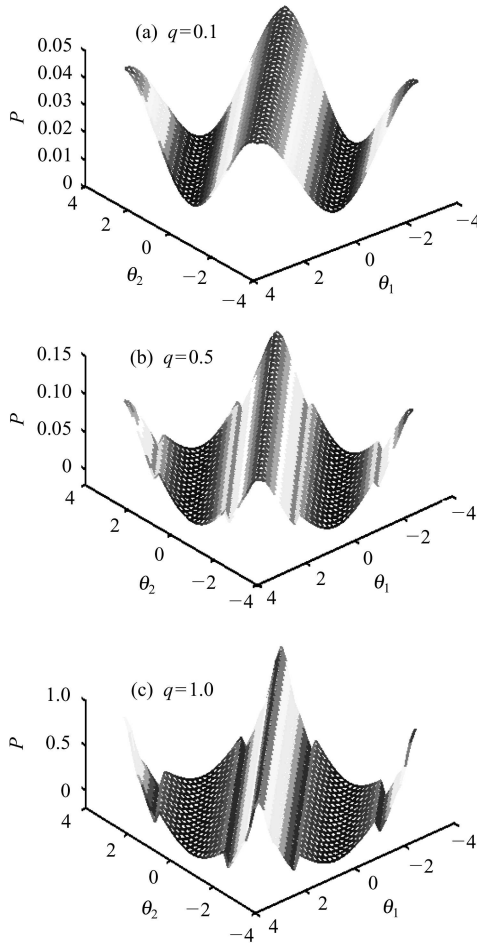


图1 q 变形对相干态的相位概率分布随 θ_1, θ_2 的变化($m = 2$)

图1(a)—(c)是当参数 $|\xi|$ 取一定值 ($|\xi| = 4.0$), q 参数分别取 0.1, 0.5 和 1.0 时, q 变形对相干态的相位概率分布随 θ_1 和 θ_2 的变化规律. 可以看出, 相位概率分布 $P(\theta_1, \theta_2)$ 的峰值主要由相位参数 θ_1 和 θ_2 控制, 此外

q 参数对 $P(\theta_1, \theta_2)$ 也有影响, 当 q 参数取较小值(即 q 偏离 1.0 较大)时, q 变形对相干态的相位概率分布呈现单峰结构, 从峰顶到谷过渡比较平滑, 峰的绝对值较小; 当 $q \rightarrow 1.0$ (特别是 $q = 1.0$) 时, 相位概率分布的峰值较大且变得尖锐, 主峰到谷还有一些次极小的峰形成多峰结构. 由此可以看出, 当 q 参数越接近于 1.0, q 变形对相干态的量子干涉效应要比 q 偏离 1.0 大时显著.

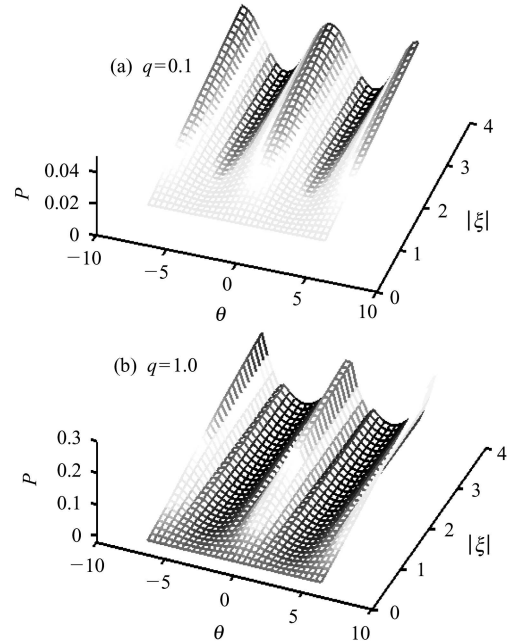


图2 q 变形对相干态的相位概率分布随 $\theta, |\xi|$ 的变化($m = 2$)

从(26)式和图1(a)—(c)可以看出, q 变形对相干态的相位概率分布 $P(\theta_1, \theta_2)$ 中两模的相位参数 θ_1 和 θ_2 完全对等, 这意味着对相干态两模间的强关联性. 为了研究 $P(\theta_1, \theta_2)$ 随参数 $|\xi|$ 的变化情况, 取 $\theta = \theta_1 + \theta_2$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 区间内变化, 数值计算给出 q 变形对相干态的相位概率分布 $P(\theta = \theta_1 + \theta_2)$ 随 θ 和 $|\xi|$ 的变化规律如图2(a), (b)所示. 可以看出, 除相位概率分布受到 q 参数的调节呈单峰或多峰结构外, 随着参数 $|\xi|$ 的增大, 其峰值增大, 即峰值结构越来越明显, 量子干涉效应变得越来越显著.

4 结论

相位概率分布可以用来研究相位的各种特性, 本文在文献[16]的基础上, 通过推广 Pegg 和 Barnett 的相位态和相位算符到 q 变形的双模情况, 进而研究了 q 变形对相干态的相位概率分布特性. 结果表明, q 变形对相干态的相位概率分布分别受到相位参数 θ_1, θ_2 和

参数 q 与 $|\xi|$ 的调节. 其中相位参数 θ_1 和 θ_2 使相位概率分布呈峰值结构; 参数 q 的调节使相位概率分布峰值强度变小并从多峰结构过渡到单峰结构; 随着 $|\xi|$ 参数

变大, 相位概率分布的强度变大, 量子干涉效应变得显著.

参考文献(References)

- 1 Carruthers P, Nieto M. Rev. Mod. Phys., 1968, **40**(2): 411
- 2 Sanders B C, Barnett S M et al. Opt. Commun., 1986, **58**(4): 290
- 3 Fan H Y, Zaidi H R. Opt. Commun., 1988, **68**(2): 143
- 4 Pegg D T, Barnett S M. Europhys. Lett., 1988, **6**(6): 483
- 5 Pegg D T, Barnett S M. Phys. Rev., 1989, **A39**(4): 1665
- 6 Barnett S M, Pegg D T. J. Mod. Opt., 1989, **36**(1): 7
- 7 Gantsog Ts, Tanas R. Opt. Commun., 1991, **82**(1—2): 145
- 8 Lynch R. Phys. Rev., 1990, **A41**(5): 2841
- 9 Grøbech-Jensen N, Christiansen P L et al. J. Opt. Soc. Am., 1989, **B6**(12): 2423
- 10 Schleich W, Horowicz R J, Varro S. Phys. Rev., 1989, **A40**(12): 7405
- 11 WANG Ji-Suo, LIU Tang-Kun et al. Acta Physica Sinica, 2004, **53**(11): 3729 (in Chinese)
(王继锁, 刘堂昆等. 物理学报, 2004, **53**(11): 3729)
- 12 Dung H T, Tans R, Shumovsky A S. J. Mod. Opt., 1991, **38**(10): 2069
- 13 Agarwal G S. Phys. Rev. Lett., 1986, **57**(7): 827
- 14 Agarwal G S. J. Opt. Soc. Am., 1988, **B5**(9): 1940
- 15 SONG Tong-Qiang, ZHU Yue-Jin. Acta Optica Sinica, 2003, **23**(8): 906 (in Chinese)
(宋同强, 诸跃进. 光学学报, 2003, **23**(8): 906)
- 16 WANG Zhong-Qing, LI Jun-Hong et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2005, **29**(6): 623 (in Chinese)
(汪仲清, 李俊红等. 高能物理与核物理, 2005, **29**(6): 623)
- 17 Biedenharn L C. J. Phys., 1989, **A22**: L873

Phase Probability Distributions of Pair q -Coherent States*

WANG Zhong-Qing^{1,2,1)} DUAN Chang-Kui^{1,2}

1 (College of Optical and Electronic Engineering,

Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

2 (Key Laboratory of Micro-electronic Engineering of Chongqing, Chongqing 400065, China)

Abstract Based on our previous work, the phase state and phase operator introduced by Pegg and Barnett are generalized to two-mode q -deformed circumstances. With the aid of numerical method, the phase probability distributions of q -deformed pair coherent state are investigated. It is shown that these probability distributions of the state are regulated by the parameters of phase, the q -number and the magnitude of $|\xi|$. Therefore, the q -deformed pair coherent state exhibits different quantum interference properties.

Key words q -deformation, pair coherent state, phase probability distribution, quantum interference property

Received 30 June 2005

*Supported by National Natural Science Foundation of China (10474092)

1) E-mail: wangzhq@cqupt.edu.cn